CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

FFM332 - MEKANIK för Kf 2013-05-29

Examinator: Gabriele Ferretti rum: Origo 6109
tel. 7723168, 0762293068 email: ferretti@chalmers.se

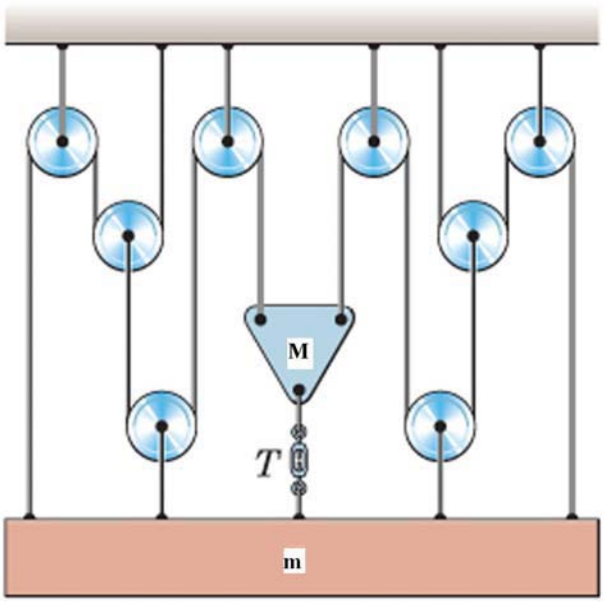
OBS: Nästa granskningstillfälle: 2013-06-17 Kl.10:00 - 12:00 i mitt rum.
Alternativt: 2013-09-27 Kl.12:00 - 13:00 i mitt rum.
Om ni kommer, måste ni hämta först tentorna hos F-kansliet i Origo 4:e vån. (Öppettider mån, ons, fre 9:00-11:00).

Hjälpmedel: Endast Chalmersgodkänt miniräknare.

Tentamen innehåller 6 uppgifter. Varje tal ger max 6 poäng.

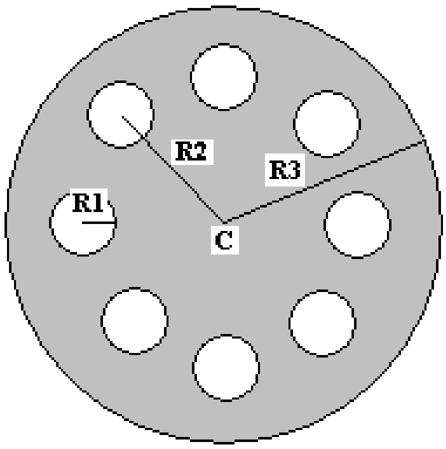
1.

Bestäm spänningen T i vantskruven för den kombination av block, trissor och kabel som visas i figuren. Förutom m och M, betrakta trissor, rep och vantskruven som masslösa.



2.

Beräkna tröghetsmomentet runt axeln som går genom centrum C (i rät vinkel mot bilden) av bromsdisken på bilden. Diskens tjocklek är $h = 1$ cm och den är gjord av gjutjärn som har densitet $\rho = 7700$ kg/m^3. Använd $R1 = 2$ cm, $R2 = 15$ cm och $R3 = 20$ cm.



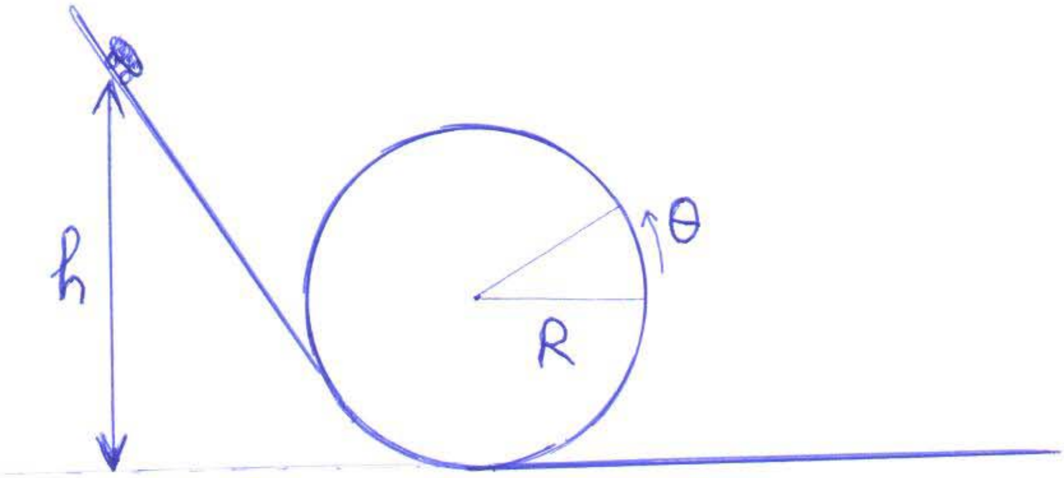
(*Hjälp*: Tröghetsmomentet runt axeln som går genom centrum av en uniform cylinder med radien r och massan m är $mr^2/2$.)

3.

En lastbil (med massan m) står på ett lastfartyg (med massan M) som ligger stilla i vattnet. Helt plötsligt blir lastbils-chauffören galen, han startar motorn och accelererar med konstant acceleration a (med avseende på lastfartyget) och efter han kört en sträcka L på lastfartyget så hamnar lastbilen i vattnet . Beräkna hastigheten av fartyget med avseende på vattnet efter att lastbilen har kört av den. Försumma friktionen mot vattnet. Kontrollera att ditt svar är rimligt för gränserna $M \gg m$ och $M \ll m$.

4.

Ett litet vagn startar i vilan vid höjden h, glider på ett friktionslöst spår och gör en cirkulär loop med radie R enligt bilden. Vagnen är inte fäst i spåret och därför kan den släppa spåret i loppen och trilla ner. För vilka värden på h/R trillar tåget ner? Beräkna även var i loppen detta sker (d.v.s. ange θ där vagnen tappar kontakten med spåret som funktion av h/R). (Betrakta vagnen som en partikel.)



5.

Kom ihåg att lägesvektorn i polära koordinater (r, θ) skrivs som $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ och att man kan härleda uttrycket för hastigheten och accelerationen genom att använda $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ och $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$. Man behöver sällan ta mer än två tidsderivater men om det skulle behövas så kallas den *tredje* tidsderivata av $\mathbf{r}$ för "the jerk" (allvarligt!).

Beräkna "the jerk" i polära koordinater.

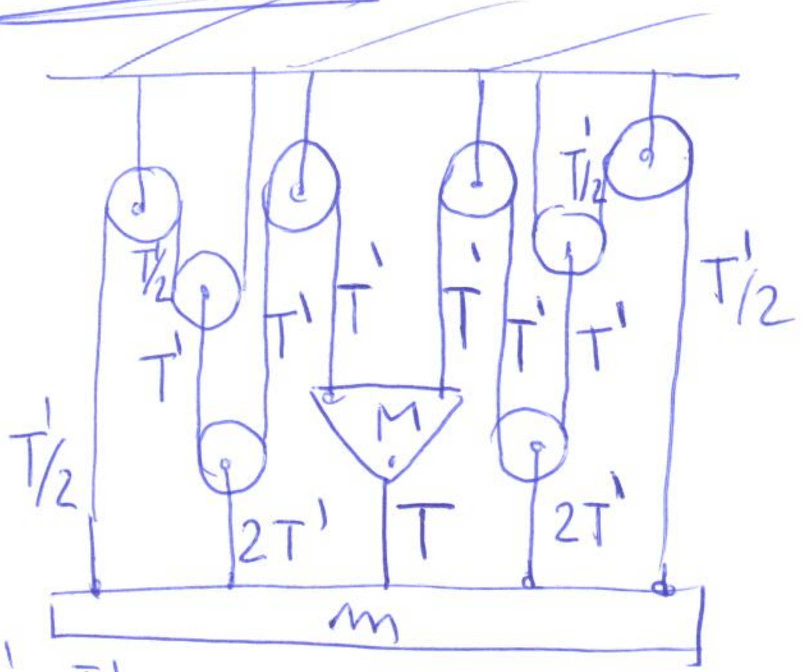
6.

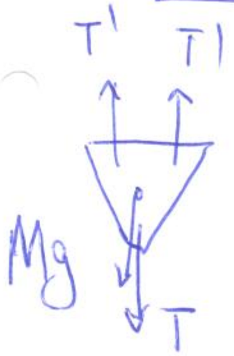
En studsboll släpps från höjden h ovanför marken. Stötkoefficienten mellan bollen och marken är $e_0 = 0.92$. Efter hur många studsar når bollen inte längre hälften av den ursprungliga höjden?
(*Hjälp*: Stötkoefficienten mellan två partiklar 1 och 2 definieras som $e_0 = (v_2' - v_1')/(v_1 - v_2)$, där v och v' är hastigheten före och efter kollisionen.)

Rita tre kvalitativa diagram som illustrerar tidsberoendet av bollens höjd, hastighet och acceleration under de två första studsar.

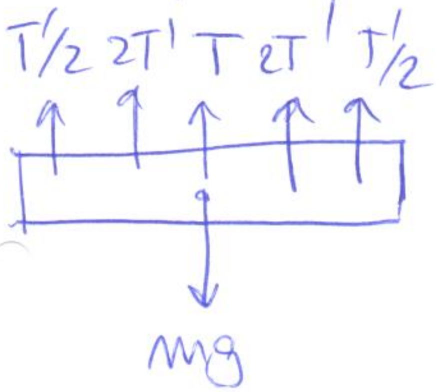
PS: Lastbils-chauffören i problem 3 blev räddad. Han mår bättre nu.

PROBLEM 1





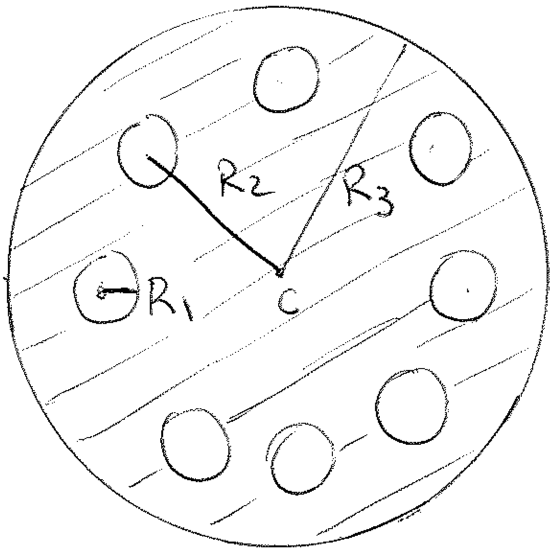
$$T + Mg = 2T'$$



$$5T' + T = mg.$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2}{7}\left(m - \frac{5M}{2}\right)g.$$

PROBLEM 2



$R_1 = 2$ cm
$R_2 = 15$ cm
$R_3 = 20$ cm
$h = 1$ cm
$\rho = 7700$ Kg/m^3

Full disk w/o holes. mass $= \pi R_3^2 \cdot h \cdot \rho = 9.676$ kg

mom of inertia $= \frac{1}{2} \cdot 9{,}676\,\text{kg} \times (0{,}2\,\text{m})^2$

$= 0{,}194\ \text{Kg} \cdot \text{m}^2$

Each hole around its center:

mass $= -\pi R_1^2 h \rho = -9{,}68 \times 10^{-2}$ kg

mom of inertia $= -\frac{1}{2}(9{,}68 \times 10^{-2}\,\text{kg})(0{,}02\,\text{m})^2 =$

$= 1{,}94 \times 10^{-5}$

Total mom of inertia:

$$0{,}194 - 8\left(1{,}94 \times 10^{-5} + 9{,}68 \times 10^{-2} \cdot (0{,}15)^2\right) = \underline{0{,}176\,\text{kgm}^2}$$

PROBLEM 3

V, v refers to water. (Assume > 0).

The velocity w/ respect to the boat is $v' = a \cdot t = \sqrt{2La} = v + V$

Cons. of momentum

$$MV = mv = m(v' - V)$$

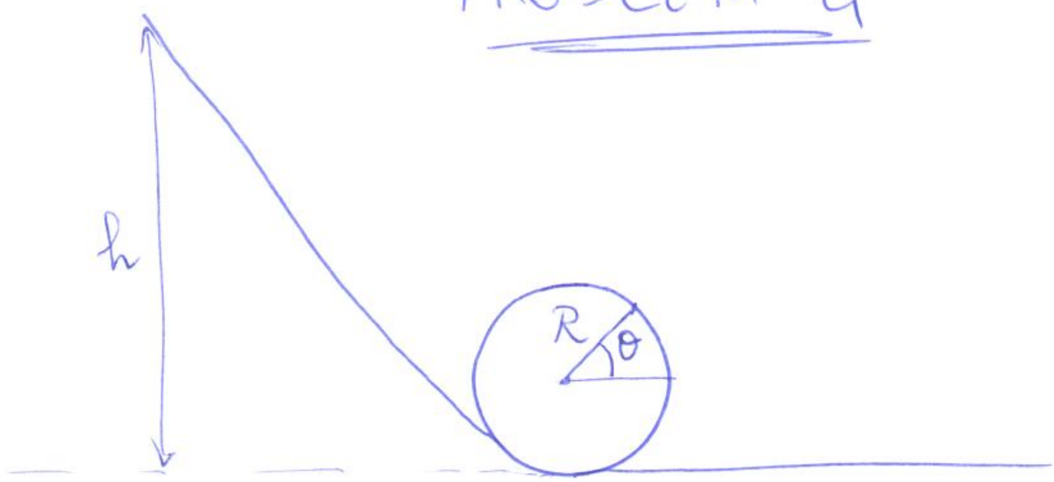
$$\Rightarrow V = \frac{m}{M+m}\sqrt{2La}.$$

$M \gg m \quad V \to 0$

$M \ll m \quad V \to v'$

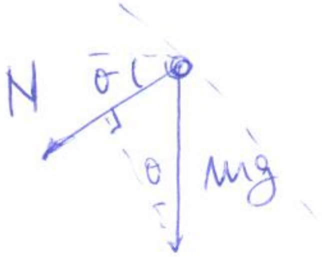
ok.

PROBLEM 4



$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gR\sin\theta + \cancel{m}gR = \cancel{m}gh$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \sqrt{2g(h-R-R\sin\theta)}$$

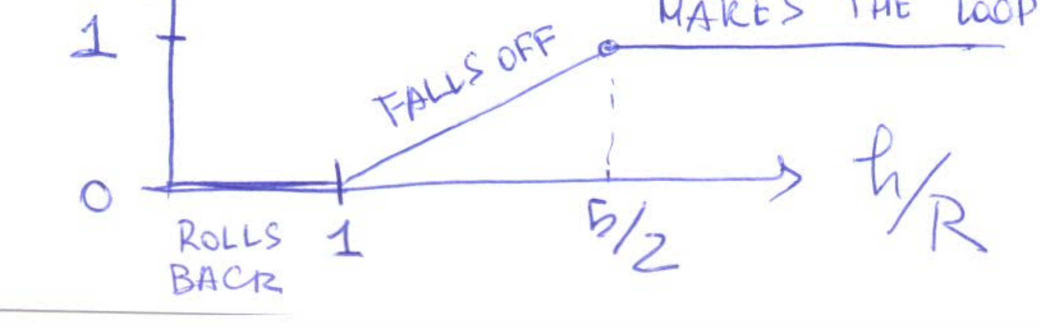


$$N + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

$$N = 0 \Rightarrow \cancel{m}\cancel{g}R\sin\theta = 2\cancel{m}\cancel{g}(h-R-R\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2(h-R)}{3R} = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}-1\right)$$

NB: $\sin\theta < 0$ not allowed since $v^2 > 0$
in this case it rolls back.



PROBLEM 5

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

$$= \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta .$$

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} = (\dddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\theta}\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_r +$$

$$+ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta} + 2\ddot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta$$

$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\dot{\mathbf{e}}_\theta =$$

$$= (\dddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\theta}\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_r + (\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^3)\,\mathbf{e}_\theta$$

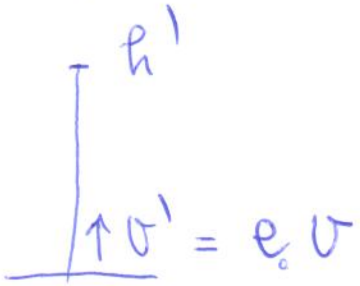
$$+ (3\dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta} + 2\ddot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta - (r\ddot{\theta}\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r$$

$$= (\dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_r +$$

$$+ (r\dddot{\theta} + 3\ddot{r}\dot{\theta} + 3\dot{r}\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^3)\,\mathbf{e}_\theta .$$

PROBLEM 6

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



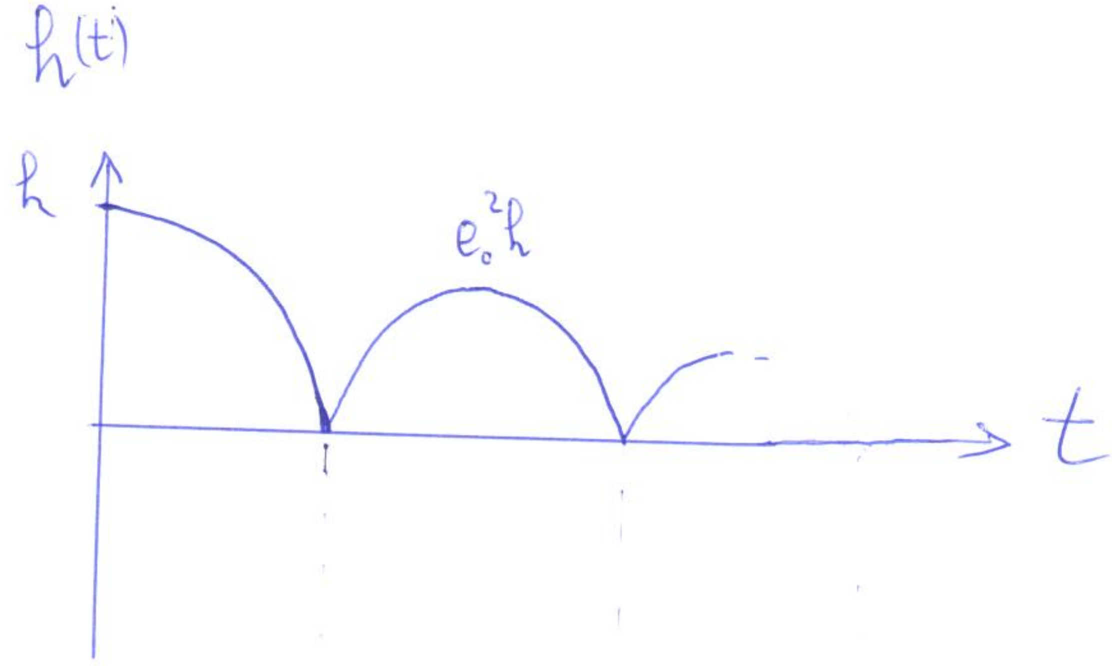
$$\frac{1}{2} m v'^2 = m g h' \Rightarrow h' = \frac{v'^2}{2g} = e_0^2 h.$$

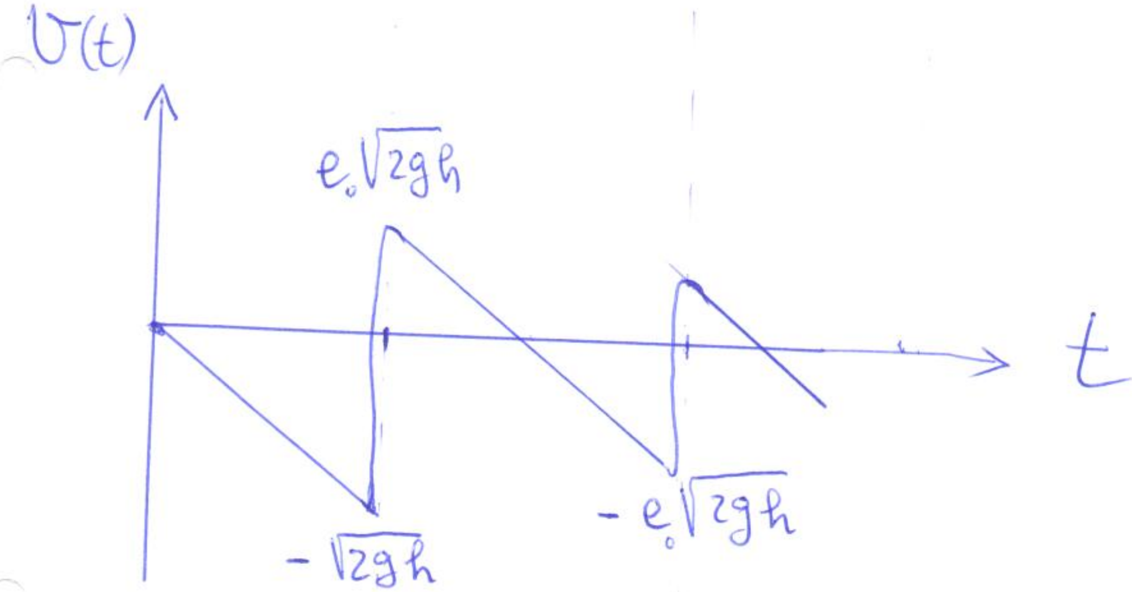
after 1 hit.

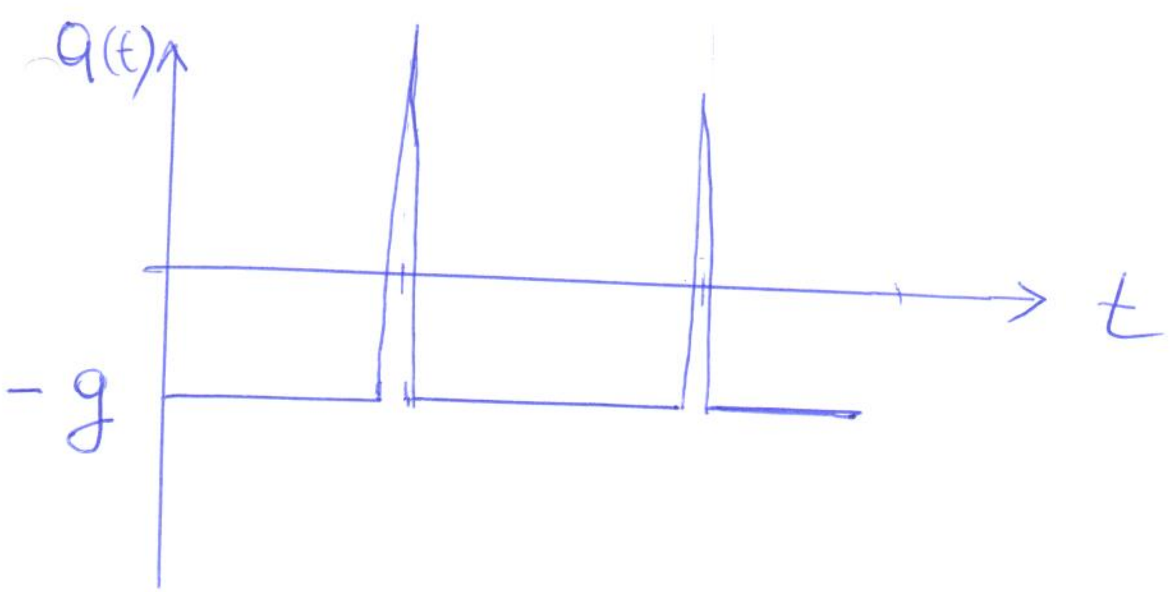
After n - hits $h(n) = e_0^{2n} h$

$$e_0^{2n} h = \frac{1}{2} h \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log e_0} = 4.1$$

meaning that after the 5th bounce it won't make it.


h(t)
h
$e_0^2 h$
t


v(t)
$e_0\sqrt{2gh}$
t
$-\sqrt{2gh}$
$-e_0\sqrt{2gh}$


a(t)
t
−g