Föreläsning 4/9 - 13

Triangelolikheten

$z, w \in \mathbb{C}$

$|z+w| \leq |z| + |w|$

Bevis:

$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} \leq \{\operatorname{Re} u \leq |u|\} \leq$

$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$

$\therefore |z+w| \leq |z| + |w|$

Följd:

$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$

Felvänd triangelolikhet

$(*)\ |z-w| \geq |z| - |w|$

Bevis:

$(*) \Leftrightarrow |z| \leq |z-w| + |w|$

sant ty $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w|$

Rötter ur komplexatal

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Lös ekvationen $z^n = w$

Skriv $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

de Moivre:

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

Då $\rho = r^n \quad \therefore r = \rho^{1/n}$

Dessutom $n\theta = \phi + 2\pi k \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \phi/n + 2k\pi/n = \theta_k$

$z = \rho^{1/n}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Anm: $n=2$, ofta enklare:

$z^2 = w$, $z = x+iy$, $w = a+ib$

$x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Gränsvärden

Om $x_n \in \mathbb{R}$ så vet vi vad $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ betyder.

Om $z_n \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, vad betyder $\lim_{n\to\infty} z_n = A$?

Definition

$\lim_{n\to\infty} z_n = A$ omm $\lim_{n\to\infty} |z_n - A| = 0$

$\iff \lim_{n\to\infty} |z_n - A|^2 = 0$ $\quad (A = a+ib)$

$\iff (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 \longrightarrow 0$

dvs $x_n \to a$ och $y_n \to b$

Definition

$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ om $|z_n| \to \infty$

Definition

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funktion

$\lim_{z\to a} f(z) = b$ betyder att $\lim_{z\to a} |f(z) - b| = 0$

dvs $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$,

$|f(z) - b| < \varepsilon$ om $|z-a| < \delta$

Definition

f är kontinuerlig om $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$

Extra övning

$|z|<1$

$z_n = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots(1+z^{2^n})$

Bevisa att $\lim z_n = \frac{1}{1-z}$

Exempel

$$\lim_{z\to a} \frac{z^2-a^2}{z-a} = \lim_{z\to a} z+a = 2a$$

Om $f(z)$ funktion så är f deriverbar i a om

$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existerar $(=f'(a))$

$\therefore$ $f(z)=z^2$ är deriverbar

Tag nu $f(z)=\bar{z}=x-iy$

$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ existerar ej!

$$\left(\begin{array}{l} z\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{z}=1 \\ z\in i\mathbb{R} \Rightarrow \frac{\bar{z}}{z}=-1 \end{array} \right)$$

Definition

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i = a \quad \text{om} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z_i = a$$

ex
$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

om $|z|<1$

Obs: $\sum_{j=0}^{\infty} z_j = \sum_{j=0}^{\infty} x_j + i \sum_{j=0}^{\infty} y_j$, $z_j = x_j + i y_j$ (om konvergent

ex $\sum_{j=0}^{\infty} r^j \cos j\theta = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \operatorname{Re} \frac{1}{1-z}$, $0 \le r < 1$

Definition

$\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ är absolutkonvergent om $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j| < \infty$

Sats

absolutkonv. $\Longrightarrow$ konv.

Bevis: $z_j = x_j + i y_j$, $|x_j| \le |z_j|$, $|y_j| \le |z_j|$

$\because \sum |z_j| < \infty \Longrightarrow \sum |x_j| < \infty$ och $\sum |y_j| < \infty$

Motsvarande reella sats

$\Rightarrow \sum x_j$ konv. och $\sum y_j$ konv.

$\Rightarrow \sum z_j$ konv.

Följd: $|z_j| \le M_j$ och $\sum_0^\infty M_j < \infty$

$\Rightarrow \sum_0^\infty z_j$ konvergent.

ex $\sum_1^\infty \frac{z^j}{j}$ konv. om $|z| < 1$

Bevis: $\left|\frac{z^j}{j}\right| \le |z|^j = M_j \quad \sum M_j < \infty$

$\sum_1^\infty \frac{z^j}{j}$ (absolut) konv.

ex $\sum_0^\infty j z^j$ konv. om $|z| < 1$

$|jz^j| \le j|z|^j \le \ldots$ fortsätt själv!

Elementära funktioner

(:= betyder per definition)

1) exponentialfunktioner

$z = x + iy, \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$e^{iy} := \cos y + i \sin y$

Motivering: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$

$\Rightarrow e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} \ldots =$

$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) =$

$= \cos y + i \sin y$

2) logaritmer

Lös $e^z = w$

Skriv $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

ekv $e^x e^{iy} = re^{i\theta}$

$e^x = r$ och $y = \theta + 2k\pi$

$$\begin{cases} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi = \arg w \end{cases}$$

Definition: $z = \log(w) = \log(r) + i\arg(w)$.

Kan bestämma en logaritm genom

$\mathrm{Arg}(w)$ det $\arg(w)$ som uppfyller

$-\pi < \mathrm{Arg}(w) \leq \pi$

och $\mathrm{Log}(w) = \log(r) + i\,\mathrm{Arg}(w)$ (principalgrenen)

Definition av a^z, $a \in \mathbb{C}$

$a^z = e^{z\log a}$ (flervärd)

ex $(-1)^i = ?$

$\log(-1) = \log|-1| + i\arg(-1) = i\pi + 2ki\pi =$

$= i(2k+1)\pi$

$(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{ii(2k+1)\pi} = e^{-(2k+1)\pi}$

3) Trigonometriska funktioner

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin i = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2i}$