Föreläsning 11/9-13

Precisering av slutet på förra föreläsningen.

$f(z) = \log z = \log|z| + i\arg(z)$

$u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

$v = \arg(z) = \arctan(y/x)$

Visade att $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Av detta följer att $f = \log z$ är holomorf.

Vad är f'?

Metod 1: $f'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} =$

$= \lim\limits_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

Men $u_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{z}$

$\therefore f' = 1/z$

Metod 2: Vet att $e^{\log z} = z$, dvs $e^{f(z)} = z$

Derivera: $f' \cdot e^f = 1 \Rightarrow f' \cdot z = 1$

$\therefore f' = 1/z$

Sats

Antag f holomorf i Ω och Ω sammanhängande och $f' = 0$ i Ω.

Då är f konstant.

Potensserier

Definition

En serie $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ är en potensserie

ex
- p polynom är en potensserie $(z_0=0)$
- $\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$ $|z|<1$
- $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$

Sats

Antag $s(z)$ konvergerar för $z=z_1$
och att $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.
Då konvergerar s i z också.

Bevis

$\sum_0^\infty a_n(z_1-z_0)^n$ konv.

$\therefore$ $|a_n||z_1-z_0|^n \longrightarrow 0$

$\exists M$ s.a $|a_n||z_1-z_0|^n \leq M$

Vet att $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} = r < 1$

$\therefore$ $|z-z_0|^n = r^n|z_1-z_0|^n$

$|a_n||z-z_0|^n \leq |a_n||z_1-z_0|^n r^n \leq M r^n$

$\sum_0^\infty |a_n||z-z_0|^n \leq M\sum_0^\infty r^n < \infty$

$\therefore$ Serien är absolutkonv. $\blacksquare$

Tre möjligheter:

(i) $s(z)$ konv. bara för $z = z_0$

(ii) $s(z)$ konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

(iii) Inget av ovan, dvs

$\exists\, z' \neq z_0$: $s(z')$ konvergerar

$\exists\, z''$: $s(z'')$ divergerar

Alltså finns R, $|z'| \leq R \leq |z''|$ så att

$s(z)$ konvergerar om $|z| < R$

divergerar om $|z| > R$

(Precist: $R = \sup\{|z|;\ s(z) \text{ konv.}\}$)

ex $\sum_0^\infty z^r$ har $R=1$, $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n}$ har $R = \infty$

$\left|\frac{z}{n}\right|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ om $n >> 0$

$\sum_0^\infty n^n z^n$ har $R = 0$

Sats

(1) Antag att $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$, då $R = 1/A$

(2) Antag att $\lim |a_n|^{1/n} = A$, då $R = 1/A$

Bevis

$z_0 = 0$, Antag $\lim |a_n|^{1/n} = A$ och $|z| < 1/A$

Då $|a_n z^n| = |a_n||z|^n = (|a_n|^{1/n}|z|)^n$

om $n >> 0$ så $|a_n|^{1/n}|z| \leq r < 1$

$\therefore\ |a_n z^n| \leq r^n$

$\therefore$ serien konv.

Om $|z| > 1/A$ så

forts. $\rightarrow$

$|a_n|^{1/n}|z| \geq r' > 1$ om $n >> 0$

$\Rightarrow |a_n z^n| \geq 1$

∴ divergent. $\blacksquare$

ex $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ $a_n = 1/n!$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 = A$

$\Rightarrow R = \infty$ ∴ alltid konvergent.

ex $\sum_0^\infty 4^n z^{2n} = \star$

sätt $z^2 = w \Rightarrow \star = \sum_0^\infty 4^n w^n$, konv. då $|w| < 1/4$

∴ $S(z)$ konv. omm $|z| < 1/2$.

Sats

Antag att $\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n = f(z)$ har konv.radien R.

Då är f holomorf i $|z-z_0| < R$ och

$f'(z) = \sum_0^\infty n a_n (z-z_0)^{n-1}$

ex $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$

$f'(z) = \sum_1^\infty \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_1 \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \{n-1 = m\} =$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = f$$

$\therefore$ $f' = f$ och $\frac{de^z}{dz} = e^z$

Vet att $e^0 = 1 = f(0)$

Betrakta $\left(\frac{f(z)}{e^z}\right)' = \frac{f'e^z - f(e^z)'}{e^{2z}} =$

$$= \frac{fe^z - fe^z}{e^{2z}}$$

$\therefore$ $\frac{f}{e^z} = \text{konstant} = c$

$f = ce^z$, $f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1$

$\therefore$ $f(z) = e^z$

$$e^z = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ex $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$

$$= \frac{1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \ldots + 1 - \frac{iz}{1!} + \frac{(-iz)^2}{2!} + \ldots}{2}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

ex binomialsatsen

$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, holomorf

$$\alpha = n \Longrightarrow (1+z)^n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} z^k$$

forts. →

Säg $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$

$f' = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Å.a.s $f' = \frac{\alpha}{1+z} e^{\alpha \log(1+z)}$

$\therefore \ (1+z) f' = \alpha f$

$f' = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$

$(1+z) f' = \sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n + n a_n z^n =$

$= \sum_{0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + n a_n \right] z^n = \alpha f$

identifiera koeff.:

$(n+1) a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n$

$a_{n+1} = \frac{(\alpha - n) a_n}{n+1}$

$a_0 = f(0) = 1, \quad a_1 = \frac{(\alpha - 0)}{1} \cdot 1 = \alpha$

$a_2 = \frac{(\alpha - 1)}{2} \alpha = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$

$a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$

$\therefore \ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \binom{\alpha}{n}$

om $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

Följd av satsen om derivering av potensserien:

$z_0 = 0$

$$f'' = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

z_0 allmänt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$$

Spec: $f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k(k-1)\ldots 1 = a_k \cdot k!$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Spec: Om $\sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$

så är $a_n = b_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$