Föreläsning 13/9-13

En sats till om potensserier

Potensserier kan multipliceras formellt, dvs

$$\underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_n z^n}_{s_1} \underbrace{\sum_{0}^{\infty} b_n z^n}_{s_2} = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \;;\; c_n = \sum_{k+j=n} a_k + b_j$$

Formellt: $s_1 s_2 = \sum_{0}^{\infty} a_k z^k \sum_{0}^{\infty} b_j z^j = \sum_{j,k\geq 0} a_k b_j z^{\overbrace{k+j}^{n}} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} a_k b_j \, z^n$$

Cauchys integralsats

Låt $D \subseteq \mathbb{C}$ område och $\gamma \subseteq D$ enkel sluten kurva. Antag $\text{inre}(\gamma) \subseteq D$, f holomorf i D.

Då

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Bevis

f holomorf $\Rightarrow$ f löser C.R, dvs

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

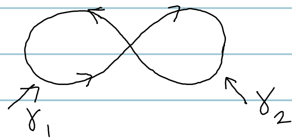
Greens formel $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma} f\,dz = i \iint_{\text{inre}(\gamma)} \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = 0$

Definition: D är enkelt sammanhängande om $\gamma \subseteq D \Rightarrow \text{inre}(\gamma) \subseteq D$ $\forall \gamma$ enkla, slutna.

Sats A

Låt D vara enkelt sammanhängande och γ sluten kurva i D, f holomorf i D.
Då
$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

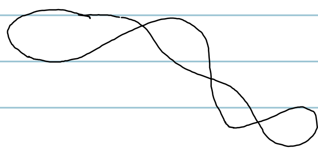
Bevis



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

"γ_2 går åt fel håll"

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = 0 - 0 = 0$$



På samma sätt, men krångligt!
Vi accepterar satsen.

Icke-ex

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f = 1/z$, holomorf i D.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

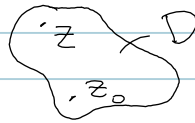
Enkelt sammanhang behövs

Följdsats (existens av primitiv funktion)

Antag f holomorf i D och D enkelt sam.hängand
Då finns F holomorf i D där $F' = f$. F bestämd upp till konstant, $F' = f = G'$ där $F = G + \text{konst}$.

Bevis

Tag $z_0 \in D$



$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi := \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi$$

där [redacted] γ_z någon kurva i D från z_0 till z.

Enligt sats A är F väldefinierad, om γ_z' är en annan kurva så är $\gamma_z - \gamma_z'$ sluten

$$\int_{\gamma_z - \gamma_z'} f\,dz = 0 \quad \text{så} \quad \int_{\gamma_z} f\,dz = \int_{\gamma_z'} f\,dz$$

$F'(z) = f(z)$?

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left\{ F(z+h) = \right.$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + \int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi$$

$$\left. F(z+h)-F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi \right\} = \left|\frac{F(z+h)-F(z)-hf(z)}{h}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{z}^{z+h} f(z)\,d\xi}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\int \big(f(\xi)-f(z)\big)\,d\xi\right| \leq$$

$$\left(\int_{z}^{z+h} f(z)\,d\xi = f(z)\int_{z}^{z+h} d\xi = hf(z)\right)$$

forts.

$$\le \frac{1}{|h|} \left|[z, z+h]\right| \max |f(\zeta)-f(z)|$$

$$\frac{1}{|h|}|h| \max_{[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\therefore F'(z)=f(z)$

Icke-ex

$D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z)=1/z$

Enda möjliga $F=\log z$, flervärd.

Obs Satsen om primitiv funktion

$\Longrightarrow$ sats A: säg $F'=f$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt$$

godtycklig

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$\therefore$ Beror endast av start- och slutpkt, oberoende av vägen, $=0$ om γ sluten.

Sats (Cauchys formel)

f holomorf i D, $\gamma\subseteq D$ enkel sluten, inre$(\gamma)\subseteq D$, $z\in$ inre(γ)

Då $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$

Förberedelse: γ_1 och γ_2 enkla, slutna $\subseteq D$.

$\gamma_2\subseteq$ inre(γ_1).

Då $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$ om f holomorf mellan γ_1 och γ_2

(ex) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z}$

Bevis (av förberedelsen)

Greens formel:

$$\int_{\gamma_1} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz = i \iint_{\substack{\text{mellan} \\ \gamma_1,\,\gamma_2}} \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy$$

Bevis av Cauchys formel

Låt $C_2 = \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, $0 < r \ll 1$

Förberedelsen $\Longrightarrow$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$

Men $\displaystyle\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\right| \leq \{(*)\}$

$\displaystyle\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta - z}\right)\right| \leq$

$\displaystyle\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leq$

$\displaystyle\leq \frac{1}{2\pi}\left(\text{längden av } \{|\zeta - z| = r\}\right) \max\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right|$

Låter vi $r \to 0$ får vi gränsvärdet $\lim r|f'(z)| = 0$ ▨

$\displaystyle\left((*) \text{ ty } \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \right)$

ex $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4iz-1}$

$z^2+4iz-1=0$

$z=-2i\pm\sqrt{-4+1}=i(-2\pm\sqrt{3})$

$z_1=i(-2+\sqrt{3})$

$z_2=i(-2-\sqrt{3})$

$\displaystyle I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$ Sätt $f(z)=\dfrac{1}{z-z_2}$,

f holomorf i $|z|<1$

Cauchys formel $\Rightarrow I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-z_1}dz=$

$\displaystyle =2\pi i f(z_1)=2\pi i\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{\cancel{2}\pi\cancel{i}}{\cancel{2}\sqrt{3}\cancel{i}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

ex $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}=\int_0^{2\pi}\frac{2i\,d\theta}{4i+e^{i\theta}-e^{-i\theta}}=$

$\displaystyle=2\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{4ie^{i\theta}+e^{2i\theta}-1}=\left\{\gamma(\theta)=e^{i\theta}=z,\ \gamma'=ie^{i\theta}\right\}=$

$\displaystyle=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{4iz+z^2-1}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Följd av Cauchy

Vet $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$\displaystyle f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\ \ldots\ f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$

Spec: om f holomorf så har f derivator av alla ordningar