Föreläsning 17/9-13 fm

Repetition: Förra gången gick vi igenom de två centralaste resultaten i komplexanalys.

Notation: D öppen, sammanhängande mängd i $\mathbb{C}$. $A(D) = \{f: D \to \mathbb{C};\ f \text{ holo på } D\}$

Cauchys sats (CS)

Antag $f \in A(D)$

Låt γ vara en styckvis deriverbar, enkel, sluten kurva i D.

Då gäller $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Cauchys integralformel (CIF)

Antag $f \in A(D)$, γ som i CS.

Låt Ω vara området innanför γ.

Då gäller $f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\,dz \quad \forall p \in \Omega$

Både CS och CIF är relativt enkla att bevisa, men har likväl fantastiska konsekvenser.

2.4 Konsekvenser av CIF

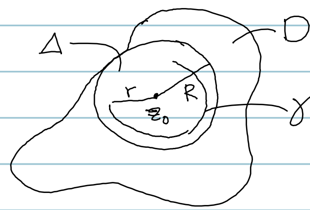
Sats 2.4.1

Antag $f \in A(D)$, $z_0 \in D$

Om cirkelskivan $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\} \subset D$ för något $R > 0$, så gäller att $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ på Δ.

Vidare gäller att

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta$$ där $\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta - z_0| = r\}$ och $0 < r < R$ godt.



Bevis

Välj z s.a $|z - z_0| < r$
(dvs innanför γ)

CIF: $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad (*)$$

Låt nu $s = |z - z_0|$, så $s < r$.
Om $\zeta \in \gamma$ gäller nu att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{s}{r} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$ geometrisk summa

Stoppa in detta i $(*)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta = \{\text{likf. konv.}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \right) (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

om $$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \quad \blacksquare$$

Alltså kan varje $f \in A(D)$ uttryckas som en potensserie kring varje punkt $z_0 \in D$.
Från sats 2.2.3 vet vi vidare att varje (konvergent) potensserie är oändligt der.bar.
Detta ger oss:

Följdsats 1
Om f har en komplex derivata (dvs. holo) så är f oändligt deriverbar.

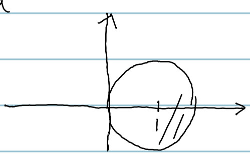
Stor skillnad mot $\mathbb{R}$-analys
ex Funktionen $u(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

har derivatan $u'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$ $(= 2|x|)$

$u'(x)$ ej der.bar (i noll)

Obs! Sats 2.4.1 ger inte nödvändigtvis det enklaste sättet att ta fram potensserien på, den garanterar bara att en potensserie-utveckling existerar.
Oftast är det enklare att använda att $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ när vi väl vet att $f^{(k)}$ existerar $\forall k$.

ex Potensserieutveckla $f(z) = 1/z^3$ på $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\, |z-1| < 1\}$



Lösn. f holo på $\Delta \Rightarrow f$ ∞-der.bar på Δ.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

I vårt fall: $z_0 = 1$, $f'(z) = -3 \cdot \frac{1}{z^4}$

$$f''(z) = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1/z^5$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(z) = (-1)^k \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k+2) \cdot 1/z^{k+3} =$$

$$= (-1)^k \frac{(k+2)!}{2} \cdot \frac{1}{z^{k+3}}$$

$$\therefore f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+2)!}{2k!}(z-1)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(k+2)(z-1)^k$$

Följdsats 2

Antag att $f \in A(D)$ och att det för något $z_0 \in D$ gäller att $f^{(k)}(z_0) = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Då är $f \equiv 0$ på D.

"Bevis"

Välj $R_0 > 0$ s.a $\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < R_0\} \subset D$

För $z \in \Delta_0$ följer av sats 2.4.1 att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = 0 \quad (\text{ty } f^{(k)}(z_0) = 0 \; \forall k)$$

Tag $\tilde{z} \in D$ godtyckligt. Vill visa: $f(\tilde{z}) = 0$

Behöver två (intuitivt självklara) resultat som vi inte kommer bevisa (därav "Bevis")

Nr 1: Det existerar en kurva γ i D som förbinder z_0 med $\tilde{z}$.

Tag en punkt $z_1 \in \gamma \cap (\Delta_0 \setminus \{z_0\})$

forts. →

$f \equiv 0$ på $\Delta_0 \Rightarrow f^{(k)}(z_1) = 0 \ \forall k$

Välj $R_1 > 0$ s.a $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_1| < R_1\} \subset D$

Av argumentet ovan följer att

$f \equiv 0$ på Δ_1

Upprepa detta genom att välja $z_2 \in \gamma \cap \Delta_0^c \ldots$

Nr 2: Vi kommer att komma fram till en cirkelskiva som innehåller $\tilde{z}$ i ett ändligt antal steg

$\therefore f(\tilde{z}) = 0$ för $\tilde{z} \in D$ godt.

$\Rightarrow f \equiv 0$ på D. $\blacksquare$

Följdsats 2.1 (fås av följdsats 2)

Antag att $f, g \in A(D)$ och att $f = g$ på någon (godt. liten) cirkelskiva

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$

(dvs. $\varepsilon > 0$, $z_0 \in D$ godt.)

Då gäller att $f = g$ på hela D.

Bevis

$h = f - g \in A(D)$ och $h^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0) - g^{(k)}(z_0) = 0 \ \forall k$

då $f = g$ på Δ.

Följdsats 2 $\Rightarrow h \equiv 0$ på $D \Leftrightarrow f = g$ på D $\blacksquare$

"Räcker" med att känna till en holo funktion på ett godt. litet område.

("DNA-egenskap" för holo fkner)

Då varje holo funktion har en potensserie går det bra att tala om ordning till nollställen, precis som för polynom.

Definition

Antag $f \in A(D)$, $z_0 \in D$. Utveckla f i en potensserie kring z_0 (går alltid enligt sats 2.4.1)

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

om $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, men $a_m \neq 0$ säger vi att f har ett nollställe av ordning (eller multiplicitet) m i z_0.

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + \dots = (z-z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots)$$

CIF: f holo $\Rightarrow f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-p}\,dz \quad \forall p \in \Omega$

Märkligt att $f|_{\Omega}$ känd om $f|_{\gamma = \partial\Omega}$ känd.

Jämför t.ex. $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{på } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} & \text{känd} \end{cases}$ $(*)$

Att lösa $(*)$ innebär att vi får kännedom om $u|_{\Omega}$ givet att vi vet vad $u|_{\partial\Omega}$ är.

"På samma sätt" i det komplexa fallet.

$$f \text{ holo} \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Kan tänka att vi löser

$$\begin{cases} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} & \text{på } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} \text{ känd} \end{cases}$$

"Miraklet" är att lösningen har en så pass enkel form.