Föreläsning 20/9-13

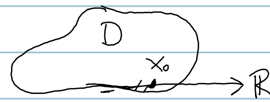
Analytisk fortsättning

Antag f holo i området D (sammanhängande).
Säg $z_0 \in D$ och $f^{(k)}(z_0) = 0$
$k = 0, 1, 2, \ldots$ då $f \equiv 0$ i D.

($f \in H(D)$ betyder samma)

Följd

Antas $f = 0$ på $\mathbb{R} \cap D$
Då är $f \equiv 0$ i D.



Bevis

Tag $z_0 = x_0$ i $\mathbb{R} \cap D$. Vet $f'(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$

$\therefore f'(z) = 0$ på $\mathbb{R} \cap D$
Upprepa: f'', $f^{(k)} = 0$ på $\mathbb{R} \cap D$.
$\therefore f \equiv 0$

Följd

Antag f och g holo i $\mathbb{C}$ och att
$f = g$ på $\mathbb{R}$. $f - g = 0$ på $\mathbb{R}$.
$\therefore f - g \equiv 0$ i $\mathbb{C}$ $\quad \therefore f = g$ på $\mathbb{C}$

ex Vet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$
$\therefore \sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$

Kom ihåg: f holo $\Longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$

Liouvilles sats

Antag $f \in H(\mathbb{C})$

(f hel) och $\exists M ; |f(z)| \leq M \quad \forall z$

(f begränsad)

Då är f konstant.

Bevis

Sätt $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ holo i $\mathbb{C}$, även i $z = 0$.

Ty,

$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$

$f(0) = a_0$

$$g(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots - a_0}{z} = a_1 + a_2 z + \ldots$$

$\because$ g är summan av en potensserie.

$\because$ g holo.

Cauchys integralformel ger

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad , \quad R > |z|$$

Vill visa: $g \equiv 0$ (då $f = f(0)$, constant)

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta| = R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \max_{|\zeta| = R} \frac{|g|}{|\zeta - z|}$$

$$|g(\zeta)| \leq \frac{|f(\zeta) - f(0)|}{|\zeta|} \leq \frac{2M}{R}$$

$$\frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{1}{|\zeta| - |z|} \leq \frac{1}{R - |z|}$$

$(|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z|)$

$$\because |g(z)| \leq \frac{\cancel{R}\, 2M}{\cancel{R}} \frac{1}{R - |z|} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

$\because$ $g = 0$; $f(z) = f(0)$ $\blacksquare$

Liouville $\Rightarrow$ algebrans fundamentalsats

dvs en ekv. $a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n = 0$ har alltid en lösning om $n > 0$

$p(z)$

ledning:

antag $p(z) \neq 0 \quad \forall z$

sätt $f = \dfrac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$

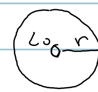
Liouville $\Rightarrow$ f konstant (varför)

$\therefore$ p konstant $- 1/f$ $\quad n = 0$.

Isolerade singulariteter

Definition

Antag $f \in H(\{z;\ 0 < |z - z_0| < r\})$



Då har f en isolerad sing. i z_0.

Tre fall:

(i) $|f(z)|$ begr. då $z \to z_0$

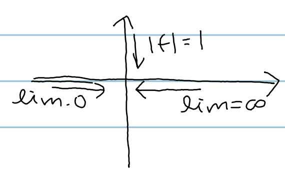
ex $\dfrac{\sin z}{z}$

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

ex $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$

(iii) varken (i) el. (ii)

ex $e^{1/z}$ $\quad$ väsentlig singularitet.



Satz (Riemann)
Antag (i) gäller.
Då är $z=z_0$ en liävbar singulaitet,
dvs vi kan definiera $f(z_0)=c$ så att
f blir holo i z_0.

(ex) $\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots$

holo över $z=0$.

Beivs av satsen
Sätt $g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2 f(z), & z\neq z_0\\ 0, & z=z_0\end{cases}$

$g'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^{\cancel{2}} f(z)}{\cancel{z-z_0}} = 0$

$\therefore$ g holo över z_0

$g(z_0) = g'(z_0) = 0$

$\therefore g(z) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_0} + \underbrace{a_1(z-z_0)}_{=0} + a_2(z-z_0)^2$

$\therefore f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = a_2 + a_3(z-z_0) + \cdots$

Potensserie, holo. ∎

(ii) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

Kom ihåg: Om g holo nära z_0 och $g(z_0)=0$
så finns ett $m=1,2,3,\ldots$ och $h(z)$ holo,
$g(z) = (z-z_0)^m h(z)$, $h(z_0)\neq 0$

m är ordningen av nollställen.

Sätt $g = 1/f$

g holo nära z_0 och begränsad

$\therefore$ g holo även i z_0, enligt (i)

$g(z_0) = 0$

Säg att ordn. av g:s nollst. i z_0 är m.

$\exists h$ holo; $h(z_0) \neq 0$

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

$$\therefore f = \frac{1}{g} = \frac{\overbrace{1/h}^{=k}}{(z-z_0)^m} = \frac{k(z)}{(z-z_0)^m}$$

$(h(z_0) \neq 0 \Longrightarrow k$ holo$)$

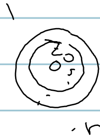
$\therefore$ I fall (ii) så finns en holo k och m;

$$f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^m}$$

f har en pol i z_0 av ordn. $\underline{m}$.

Residyen

<u>Obs</u> säg att f har en isolerad sing. i $z = z_0$, holo i $0 < |z - z_0| < r$.



<u>Betrakta</u>: $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} f(\zeta)\, d\zeta \quad , \quad 0 < s < r$

Integralen är oberoende av s.

$$\int_{|\zeta - z_0| = s} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = s'} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad \text{p.g.a Green.}$$

Definition

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} f(\zeta)\, d\zeta \quad , \quad 0 < s < r$$

(i) antag z_0 hävbar,
dvs $|f|$ begr. då $z \to z_0$
$\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ enligt Cauchys integralsats.

(ii) f har en pol av ordning m.

$$f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^m}$$

$$k(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots a_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + (z-z_0)^m R(z)$$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{k(\zeta)}{(\zeta - z_0)^m} d\zeta =$$

$$= a_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^m} + \frac{a_1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{m-1}} +$$

$$+ \dots + \frac{a_{m-1}}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} R(\zeta) d\zeta =$$

$$= a_{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = a_{m-1}$$

$$\therefore \mathrm{Res}(f, z_0) = a_{m-1} = \frac{k^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

ex $f(z) = \dfrac{z^2 + 3z - 1}{z + 2}$

singulär punkt $z = -2$, $m = 1$
$k = z^2 + 3z - 1$
$\mathrm{Res}(f, -2) = \dfrac{k(-2)}{0!} = -3$

ex $\dfrac{z^2+3z-1}{(z+2)^2}$

$z_0=-2$, $k=z^2+3z-1$, $m=2$

$\mathrm{Res}(f,-2)=\dfrac{k^{(1)}(-2)}{1!}=2z+3\Big|_{-2}=-1$

ex $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^3}$

$z_0=1$, $k=e^z$, $m=3$

$\mathrm{Res}(f,1)=\dfrac{k^{(3-1)}(1)}{(3-1)!}=\dfrac{e^1}{2!}=\dfrac{e}{2}$

Enkelpoler

Säg $f(z)=\dfrac{F}{G}$, F och G holo

$G(z_0)=0$, $G'(z_0)\neq 0$

Då blir $\mathrm{Res}(f,z_0)=\dfrac{F(z_0)}{G'(z_0)}$

ex $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$, $z_0=i\quad -i$

$\mathrm{Res}(f,i)=\dfrac{e^i}{2i}$

$\mathrm{Res}(f,-i)=\dfrac{e^{-i}}{-2i}$

$\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)=\dfrac{e^i-e^{-i}}{2i}=\sin 1.$

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\dfrac{e^z}{z^2+1}\,dz=\sum \mathrm{Res}=\sin 1$