Föreläsning 18/10-13

Satser och bevis

1) Uppskattningar av kurvintegraler:
Två delar:
(i) Δ-olikheten för integraler

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|dt$$

(Klart om g reell
$\left|\int g(t)dt\right| = \pm \int g(t)dt = \pm \int Re(g(t))dt \leq \int |g|dt$
Allmänt: multiplicera med $e^{i\theta}$ så att
$e^{i\theta}\int_a^b g\,dt$ blir reell)

(ii) $\left|\int_\gamma g\,dz\right| \leq \underbrace{|\gamma|}_{\text{längden av } \gamma} \sup_\gamma |g|$, bygger på (i).

2-3) Cauchy-Riemanns ekv.
(i) f holo $\Longrightarrow$ f löser C.Rs ekv, dvs

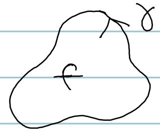
$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

eller $f = u + iv$; $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

(ii) f löser C.R och har kontinuerliga partiella derivator $\Longrightarrow$ f är holo.

4) Cauchys integralsats
γ enkel, sluten kurva, f holo innanför γ.

$$\Longrightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$$



eller

Beviset utgörs av Greens formel.

5) ~~Morera~~ har tagit bort, behöver ej kunna till tentan.

6) Cauchys integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{om}$$

f holo innanför γ och z innanför γ.

7) Liouville

f hel fkn, dvs f holo i hela $\mathbb{C}$, och
$|f(z)| \leq M \quad \forall z$
$\Rightarrow f$ konstant

Bevis: Cauchys integralformel

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\sup|f|}{(R-|z|)^2} \leq \frac{RM}{(R-|z|)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\therefore f'(z) \equiv 0$
$\therefore f$ konstant.

(alt. använd $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ i.st.f. f', se boken.)

8) Taylorutv. av en holo fkn

f holo nära z_0, så $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n$

Bevis

Tag $z_0=0$.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}}\,\frac{dw}{w}=$$

$$=\left\{\left|\frac{z}{w}\right|<1 \text{ om } |z|<R\right\}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty} z^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw}_{=a_n}=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

9) Utveckling i Laurentserie

f holo i $\{z;\ r<|z-z_0|<R\}$

$$\Longrightarrow\quad f=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{1}^{\infty}b_k(z-z_0)^{-k}$$

Anm: om f holo i $\{z;\ 0<|z-z_0|<R\}$

$$f=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{1}^{M}b_k(z-z_0)^{-k}$$

omm f har en pol i z_0 av ordn. högst M.

11) Karaktärisering av hävbar sing.

f holo i $\{0<|z-z_0|<R\}$ och f begr.

$\Longrightarrow$ f kan fortsättas till en holo fkn i $\{|z-z_0|<r\}$

12) Karaktärisering av pol.

$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty \quad\Longrightarrow$ f har en pol.

13) ~~Karaktärisering väsentlig sing.~~
behöver ej kunna.

10) En analytisk fkn har isolerade nollst.

f analytisk och $f(z_0)=0$, $f \neq$ konst.

$\Longrightarrow \exists\, r>0$: $f(z) \neq 0$ om $0<|z-z_0|<r$

holo

Bevis: $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$

Då $g \neq 0$ om $|z-z_0|<\rho$

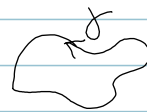
$\therefore |f(z)| \neq 0$ om $0<|z-z_0|<r$

14) Argumentprincipen på formen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P$$

$=$ # nollst innanför γ minus # poler.

15) Rouchés sats



f och h holo innanför γ och $|h|<|f|$ på γ

$\Longrightarrow$ f och $f+h$ har lika många nollst. innanför γ.

(I boken: $|f+g|<|f|$ på γ
$\Longrightarrow$ f och g har lika många nollst.
ekvivalent via översättningen:
$h=-(f+g)$; $f+h=-g$)

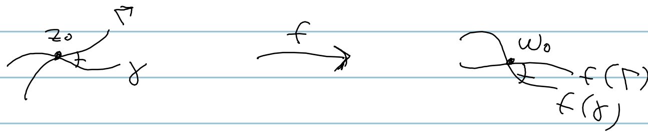
16) Algebrans fundamentalsats

Bevis: Rouché!

17) Satsen om konform avbildning

f holo och $f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ f bevarar vinklar, dvs är konform.



18) $\mathcal{L}(u') = s\tilde{u} - u(0)$

19) $\mathcal{Z}(a * b) = \mathcal{Z}(a)\mathcal{Z}(b)$

20) $\mathcal{Z}(S(a)) = z[\mathcal{Z}(a) - a_0]$

21) Maxprincipen

En holo fkn har inget lokalt max för $|f|$,

Bevis: Bygger på: U öppen $\Rightarrow$ $f(U)$ öppen.

(följd av 21):

f holo i D och kontinuerlig på $\overline{D}$.

$$\Rightarrow \max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|$$

22) Schwartz lemma

f holo och $|f| \leq 1$ i $\{|z|<1\}$

och $f(0) = 0$

$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|$

Skiss: $g(z) = \frac{f(z)}{z}$; holo i $\{|z|<1\}$

$|g| \leq 1$ på randen

$\therefore$ $|g| \leq 1$ inuti.

$\therefore$ $|f(z)| \leq |z|$

Tentauppgift 8 ang

P polynom grad n

Q polynom grad m $\qquad m \geq n$

P har nollst. $z_1, z_2, \ldots, z_n$

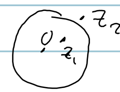
där $|z_1| < |z_2| < \ldots < |z_n|$

Antag $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{Q}{P}\, dz = 0$ om $r \neq |z_j|$

Då ~~Pdela~~ P delar Q.

Bevis: $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{Q}{P}\, dz = \sum_{|z_j|<r} \operatorname{Res}_{z_j} = \sum_{|z_j|<r} \frac{Q(z_j)}{P'(z_j)} = 0$

Tag $r = r_1$ s.a $|z_1| < r_1 < |z_2|$



$\therefore$ $Q(z_1) = 0$

$$\sum_{|z_j|<r_1} \frac{Q(z_j)}{P'(z_j)} = 0 \qquad \left(= \frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} \right)$$

Tag $|z_2| < r_2 < |z_3|$

$$\therefore \sum_{|z_j|<r_2} \frac{Q(z_j)}{P'(z_j)} = 0 \qquad \left(= \frac{Q(z_1)}{P'(z_1)} + \frac{Q(z_2)}{P'(z_2)} = \frac{Q(z_2)}{P'(z_2)} \right)$$

$\therefore$ $Q(z_2) = 0 \ldots \quad Q(z_j) = 0$

$\therefore$ P delar Q.