Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-10-24, e, V
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0704-459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $z^3 - 3z + 1 = 0$ innanför cirkeln $\mid z - 1 \mid = 1$?

2. (2p+2p) a) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $i = T(2)$ och $\infty = T(3)$. b) Beräkna

$$\int_\gamma T^2(z)dz$$

   då γ är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie 4.

3. (1p+2p+1p) a) Visa att funktionen

$$u(x,y) = x\cosh x \cos y - y \sinh x \sin y$$

   är harmonisk.

   b) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ vars realdel är lika med $u(x,y)$ och som uppfyller $f(0) = 0$.

   c) Beräkna $f''(i\frac{\pi}{2})$.

4. (4p) Antag a och b är positiva reella tal. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx.$$

5. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

6. (2p) Funktionen f är analytisk. Visa att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

7. (3p) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-10-24, e, V
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0704-459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $z^3 - 3z + 1 = 0$ innanför cirkeln $\mid z - 1 \mid = 1$?

   Lösning: Sätt $z = w + 1$. Då är

   $$z^3 - 3z + 1 = w^3 + 3w^2 + 3w + 1 - 3w - 3 + 1$$
   $$= w^3 + 3w^2 - 1.$$

   Det gäller alltså att avgöra hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $w^3 + 3w^2 - 1 = 0$ har innanför cirkeln $\mid w \mid = 1$. På cirkeln $\mid w \mid = 1$ gäller att

   $$\mid (w^3 + 3w^2 - 1) + (-3w^2) \mid \leq \mid w^3 - 1 \mid \leq 2 < 3 = \mid -3w^2 \mid .$$

   Rouchés sats medför nu att polynomen $w^3 + 3w^2 - 1$ och $-3w^2$ har lika många nollställen, räknade med multiplicitet, innanför cirkeln $\mid w \mid = 1$ dvs 2. $SVAR : 2$

2. (2p+2p) a) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $i = T(2)$ och $\infty = T(3)$. b) Beräkna

   $$\int_\gamma T^2(z)dz$$

   då γ är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie 4.

   Lösning: a) Vi får att

   $$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{i-\infty}{i-0} = \frac{z-1}{z-3}\frac{2-3}{2-1}$$

   dvs

   $$w = T(z) = i\frac{1-z}{z-3} \leftarrow SVAR$$

b) Antag $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $f(z)$ är analytisk och $v(x,y)$ är en reellvärd funktion som uppfyller $v(0,0) = 0$. Beroende på Cauchy-Riemanns ekvationer gäller att

$$f'(x+iy) = u'_x - iu'_y$$

$$= \cosh x \cos y + x \sinh x \cos y - y \cosh x \sin y$$

$$-i(-x \cosh x \sin y - \sinh x \sin y - y \sinh x \cos y).$$

Genom att sätta $y = 0$ får vi att

$$f'(x) = \cosh x + x \sinh x.$$

Om två hela funktioner sammanfaller på realaxeln så är de lika överallt och det följer att

$$f'(z) = \cosh z + z \sinh z.$$

Alltså är

$$f(z) = z \cosh z + C.$$

Men $f(0) = 0$ ger $C = 0$ och vi får att $f(z) = z \cosh z \leftarrow SVAR$

c) Eftersom $f''(z) = 2\sinh z + z\cosh z$ är $f''(i\frac{\pi}{2}) = (i-(-i)) + \frac{i\pi}{4}(i-i) = 2i \leftarrow SVAR$

4. (4p) Antag a och b är positiva reella tal. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx.$$

Lösning: Det gäller att

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx.$$

Sätt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}.$$

Antag först att $a \neq b$. I övre halvplanet har funktionen $f(z)$ enkelpoler i punkterna $z_0 = ia$ och $z_1 = ib$. I övriga punkter i övre halvplanet är $f(z)$ analytisk och residuteorin medför att

$$I = 2\pi i(\text{Res}(f(z);\ z_0) + \text{Res}(f(z);\ z_1))$$