Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-08-21, f, VV11
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0740 459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på 2 sidor!

---

1. (4p) Laurentserieutveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z}e^z + \frac{1}{(z+1)^2}$ i potenser av z. Utvecklingen skall gälla i ett område som innehåller punkten $z = 2$.

2. (4p) Hur många rötter har ekvationen $z^2 e^z = 5z + 2$ i området $|z| < 1$?

3. (4p) Funktionen $f(z)$ är hel och $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Vidare gäller att $u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2$ och $f(0) = 0$. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz$$

där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

4. (4p) Låt $P(z) = z^2 + 2bz + c$, där b och c är komplexa tal, och låt γ vara en enkel sluten kurva i komplexa talplanet sådan att $P(z) \neq 0$ för alla punkter z på γ. För varje positivt heltal n definieras

$$A_n = \int_\gamma \frac{dz}{P(z)^n} .$$

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} .$$

(Ledning: Om m är ett positivt heltal gäller att

$$m! = \sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$.)

5. (2p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i en domän D. Visa att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ i D, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, ..., s_n$ och

$$\lim_{s \mapsto \infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

LÖSNINGAR
TMA251 och TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-08-21, f, VV11
Hjälpmedel: Formelblad.

---

1. TMA252 (4p) Laurentserieutveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z}e^z + \frac{1}{(z+1)^2}$ i potenser av z. Utvecklingen skall gälla i ett område som innehåller punkten $z = 2$.

Lösning: Det gäller för $|z| > 1$ att

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z+1} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}$$

$$= -\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{-n-2}.$$

Kom ihåg att

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

för alla komplexa tal z. Om $|z| > 1$ blir därför

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{-n-2}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^{-n} \leftarrow SVAR$$

1. TMA251 (4p) Bestäm en harmonisk funktion $h(x,y)$ i området $x > 0$, $y > 0$, som har randvärdena

$$\begin{cases} h(x,0) = 1, \ x > 1 \\ h(x,0) = 0, \ 0 < x < 1 \\ h(0,y) = 2, \ y > 0. \end{cases}$$

Lösning: Avbildningen $w = u + iv = z^2$ avbildar området $x > 0$, $y > 0$ omvändbart entydigt på området $v > 0$. Vidare avbildas

$$x > 1, \ y = 0 \text{ på } u > 1, \ v = 0,$$

$$0 < x < 1,\ y = 0 \text{ på } 0 < u < 1,\ v = 0$$

och

$$x = 0,\ y > 0 \text{ på } u < 0,\ v = 0.$$

Vi söker därför först en harmonsk funktion $H(u, v)$ i området $\operatorname{Im} w > 0$ sådan att

$$\begin{cases} H(u,0) = 1,\ u > 1 \\ H(u,0) = 0,\ 0 < u < 1 \\ H(u,0) = 2,\ u < 0. \end{cases}$$

Enligt Poissons integralformel för övre halvplanet kan vi definiera

$$H(u,v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{vH(t,0)dt}{(t-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{2vdt}{(t-u)^2+v^2} + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{vdt}{(t-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\arctan\frac{t-u}{v}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{t-u}{v}\right]_{1}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan\frac{u}{v} - \arctan\frac{1-u}{v}\right).$$

Slutligen definieras

$$h(x,y) = H(u,v) = H(x^2-y^2, 2xy)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan\frac{x^2-y^2}{2xy} - \arctan\frac{1-x^2+y^2}{2xy}\right) \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Hur många rötter har ekvationen $z^2e^z = 5z + 2$ i området $|z| < 1$?

Lösning: Sätt $f(z) = -5z - 2$ och $g(z) = 5z + 2 - z^2e^z$. På enhetscirkeln $|z| = 1$ gäller att

$$|f(z)| \geq 5|z| - 2 = 3$$

och

$$|f(z) + g(z)| \leq |z|^2 e^{\operatorname{Re} z} \leq e$$

och därmed är $|f(z) + g(z)| < |f(z)|$ på enhetscirkeln. Enligt Rouchés sats har f och g lika många nollställen innanför enhetscirkeln. Funktionen $f(z)$ har exakt ett nollställe, nämligen i punkten $-\frac{2}{5}$, som ligger innanför enhetscirkeln. Härav följer att den givna ekvationen har exakt *ett nollställe innanför enhetscirkeln.* $\leftarrow SVAR$

3. (4p) Funktionen $f(z)$ är hel och $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Vidare gäller att $u(x, y) + v(x, y) = x^2 - y^2$ och $f(0) = 0$. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz$$

där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

Lösning: Derivering av ekvationen $u(x, y) + v(x, y) = x^2 - y^2$ ger

$$u'_x + v'_x = 2x$$

och

$$u'_y + v'_y = -2y.$$

Den senare ekvationen medför, genom att utnyttja Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, att

$$-v'_x + u'_x = -2y.$$

Härav följer att

$$u'_x = x - y$$

och

$$v'_x = x + y.$$

Alltså är $f'(z) = u'_x + iv'_x = x - y + i(x + y)$ och $f'(x + i0) = (1 + i)(x + i0)$. Eftersom två hela funktioner som sammanfaller på realaxeln är lika blir $f'(z) = (1 + i)z$ varav följer att $f(z) = \frac{1+i}{2} z^2$ eftersom $f(0) = 0$. Residusatsen ger nu att

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz = \frac{2}{1+i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

$$= \frac{2}{1+i} 2\pi i = 2\pi(1 + i) \leftarrow SVAR$$

4. (4p) Låt $P(z) = z^2 + 2bz + c$, där b och c är komplexa tal, och låt γ vara en enkel sluten kurva i komplexa talplanet sådan att $P(z) \neq 0$ för alla punkter z på γ. För varje positivt heltal n definieras

$$A_n = \int_\gamma \frac{dz}{P(z)^n}.$$

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} | A_n |^{\frac{1}{n}}.$$

(Ledning: Om m är ett positivt heltal gäller att

$$m! = \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$.)

Lösning: Integranden har poler i nollställena z_0 och z_1 till $P(z)$.

Fall 1: z_0, z_1 ligger utanför γ (dvs ej på eller innanför γ).

I detta fall är $A_n = 0$ beroende på residusatsen och $\lim_{n\to\infty} | A_n |^{\frac{1}{n}} = 0$

Fall 2: z_0, z_1 ligger innanför γ.

Låt C_r vara den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie r, där r är så stort att γ ligger innanför C_r. Då är

$$A_n = \int_{C_r} \frac{dz}{P(z)^n}.$$

Om dessutom $r^2 - 2r \mid b \mid - \mid c \mid > 0$ följer att

$$| A_n | \leq 2\pi r \max_{C_r} \left| \frac{1}{P(z)^n} \right| \leq \frac{2\pi r}{(r^2 - 2r \mid b \mid - \mid c \mid)^n}$$

där uttrycket i högra ledet konvergerar mot noll då $r \to \infty$. Alltså är $A_n = 0$ och

$$\lim_{n\to\infty} | A_n |^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Fall 3: z_0 ligger innanför γ och z_1 utanför γ.

I detta fall är

$$\begin{aligned} A_n &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P(z)^n}; z_0\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z-z_1)^n} \right\}_{|z=z_0} \\ &= 2\pi i \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+n-2)}{(n-1)!(z_0-z_1)^{2n-1}} \\ &= 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(z_0-z_1)^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}. \end{aligned}$$

Genom att utnyttja att

$$m! = \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$, följer att

$$| A_n | = \sqrt{2\pi} \frac{1}{| z_0 - z_1 |^{2n-1}} \frac{2^{2n-\frac{3}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} e^{\theta_{2n-2} - 2\theta_{n-1}}.$$

Eftersom

$$| z_0 - z_1 |^2 = 2^2 \, | b^2 - c |$$

blir

$$\lim_{n \to \infty} | A_n |^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{| b^2 - c |}.$$

Fall 4: z_1 ligger innanför γ och z_0 utanför γ.
Som i fall 3 erhålls att

$$\lim_{n \to \infty} | A_n |^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{| b^2 - c |}.$$

5. (2p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i en domän D. Visa att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ i D, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, \ldots, s_n$ och

$$\lim_{s \to \infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$

har Laplacetransformen $g(s)$.