LÖSNINGAR
Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 20 aug 2003 fm
Hjälpmedel: Formelblad.
−−

1. (2p+2p) a) Vilken konvergensradie R har potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{3n}} z^n?$$

Angiv endast svar.
b) Vilken summa har potensserien för $\mid z \mid < R$. Angiv endast svar.

Lösning: a) Eftersom

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^{3n}}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3^3} \to \frac{1}{27} \text{ då } n \to \infty$$

följer att $R = 27$. Serien konvergerar därför om $\mid z \mid < 27$.
b) Om $\mid z \mid < 1$ gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

och derivering ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Deriveras relationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

erhålls

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Alltså är

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

och genom att ersätta z med $\frac{z}{27}$ erhålls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{3n}} z^n = \frac{27z(27+z)}{(27-z)^3} \text{ om } \mid z \mid < 27.$$

2. (4p) Antag a är en positiv konstant. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx.$$

Lösning: Om $z = re^{it}$, där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, låter vi $f(z) = \ln r + it$. Funktionen $f(z)$ är en gren av $\log z$. Låt nu $0 < \varepsilon < a < \rho$ och sätt $\Gamma_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, och $\gamma_\varepsilon = \varepsilon e^{it}$, $\pi \geq t \geq 0$. Residusatsen ger

$$\int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{f(x)}{a^2+x^2} dx + \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{a^2+x^2} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz$$

$$= 2\pi i \text{Res}(\frac{f(z)}{a^2+z^2}; ia).$$

Vidare gäller om $\varepsilon < 1 < \rho$ att

$$\mid \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz \mid \leq \pi\rho \frac{\ln\rho + \pi}{\rho^2 - a^2} \to 0 \text{ då } \rho \to \infty$$

och

$$\mid \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz \mid \leq \pi\varepsilon \frac{-\ln\varepsilon + \pi}{a^2 - \varepsilon^2} \to 0 \text{ då } \varepsilon \to 0.$$

Det följer att

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln \mid x \mid + i\pi}{a^2+x^2} dx$$

$$= 2\pi i \text{Res}(\frac{f(z)}{a^2+z^2}; ia) = 2\pi i \frac{f(ia)}{2ia} = \frac{\pi}{a}(\ln a + i\frac{\pi}{2})$$

och genom att identifiera realdelarna i vänster och höger led blir

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

3. (4p) Antag n är ett icke-negativt heltal. Hur många rötter har ekvationen $z^n e^z = 6z + 3$ i området $\mid z \mid < 1$?

Lösning: Inför de hela funktionerna $f(z) = 6z + 3$ och $g(z) = z^n e^z - 6z - 3$. På cirkeln $\mid z \mid = 1$ gäller att

$$\mid f(z) + g(z) \mid = \mid z^n e^z \mid = e^{\operatorname{Re} z} \leq e = 2.718...$$

och

$$\mid f(z) \mid \geq 6 \mid z \mid -3 = 3.$$

Alltså är

$$\mid f(z) + g(z) \mid < \mid f(z) \mid \quad \text{om} \quad \mid z \mid = 1.$$

Rouchés sats medför nu att f och g har samma antal nollställen i $\mid z \mid < 1$ räknade med multiplicitet. Funktionen f har ett enkelt nollställe i punkten $-\frac{1}{2}$ och inga andra nollställen och vi drar slutsatsen att g har exakt ett enkelt nollställe i $\mid z \mid < 1$. Ekvationen $z^n e^z = 6z + 3$ har därför en rot i området $\mid z \mid < 1$.

4. (2p+2p) Antag $n \in \mathbf{N}_+$ och att $P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ är ett polynom av graden n. a) Visa att

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\mid z - z_1 \mid^2} + ... + \frac{\bar{z} - \bar{z}_n}{\mid z - z_n \mid^2} \text{ om } z \notin \{z_1, z_2, ..., z_n\}.$$

b) Antag $P'(z) = 0$. Visa att det existerar icke-negativa tal $\lambda_1, ..., \lambda_n$ med summan 1 sådana att

$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

Lösning: a) Derivering ger

$$P'(z) = a \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (z - z_j)$$

och
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \bar{z}_k}{\mid z - z_k \mid^2}.$$
b) Om $P'(z) = 0$ och $z \notin \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ får vi att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \bar{z}_k}{\mid z - z_k \mid^2} = 0$$
och
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{\mid z - z_k \mid^2} = 0$$
dvs
$$z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mid z - z_k \mid^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\mid z - z_k \mid^2}.$$
Om vi definierar
$$\lambda_k = \frac{\frac{1}{|z - z_k|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z - z_j|^2}}, \ k = 1, ..., n$$
så är $\lambda_1, ..., \lambda_n$ positiva tal med summan 1 sådana att
$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

Om $z = z_k$ för ett visst k definieras $\lambda_k = 1$ och $\lambda_j = 0$ om $j \neq k$ och det följer att $\lambda_1, ..., \lambda_n$ icke-negativa tal med summan 1 sådana att
$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

5. (2p) Visa att en hel begränsad funktion är konstant.

6. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

7. (3p) Visa satsen om potensserieutveckling av en funktion som är analytisk.