LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 22 oktober 2003, em v
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

1. (1p+1p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ sådan att $\infty = T(0)$, $0 = T(i)$ och $1 = T(1)$. Angiv endast svar. b) Beräkna $\int_\gamma T^2(z)dz$ där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln. Angiv endast svar.

Lösning: a) Det gäller att

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{1-\infty}{1-0} = \frac{z-i}{z-0}\frac{1-0}{1-i}$$

alltså är

$$w = \frac{1+i}{2}\frac{z-i}{z} \leftarrow SVAR$$

c) Det gäller att

$$T^2(z) = \frac{i}{2}(1 - 2i\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}) = ... + \frac{1}{z} + ...$$

varför

$$\int_\gamma T^2(z)dz = 2\pi i \text{Res}(T^2(z); 0) = 2\pi i \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm antalet enkla nollställen för polynomet $p(z) = z^5 + z - 7$ i området $1 \leq \mid z \mid < 2$.

Lösning: Sätt $f(z) = -z^5$ och $g(z) = -z + 7$.
På cirkeln $\mid z \mid = 2$ gäller att

$$\mid p(z) + f(z) \mid = \mid z - 7 \mid \leq \mid z \mid + 7 = 9 < 2^5 = \mid f(z) \mid .$$

Rouchés sats medför därför att $p(z)$ och $f(z)$ har lika många nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$ räknade med multiplicitet. Funktionen $f(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$ varför $p(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$.

På cirkeln $\mid z \mid= 1$ gäller att

$$\mid p(z) + g(z) \mid=\mid z^5 \mid= 1 < 6 \leq\mid -z + 7 \mid=\mid g(z) \mid .$$

Rouchés sats medför därför att $p(z)$ och $g(z)$ har lika många nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$ räknade med multiplicitet. Funktionen $g(z)$ saknar nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$ varför $p(z)$ saknar nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$.

Från ovanstående drar vi slutsatsen att $p(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet i området $1 \leq\mid z \mid< 2$. Det återstår att visa att nollställena är enkla. Om $p(z)$ har ett nollställe av ordning större än ett är detta också ett nollställe till $p'(z) = 5z^4 + 1$. Om

$$z^5 + z - 7 = 0 \text{ och } 5z^4 + 1 = 0$$

följer att

$$-\frac{1}{5}z + z - 7 = 0$$

dvs $z = \frac{35}{4}$, ett komplext tal som ligger utanför området $1 \leq\mid z \mid< 2$. Härav följer att polynomet $p(z)$ har 5 enkla nollställen i området $1 \leq\mid z \mid< 2 \leftarrow$ $SVAR$

3. (1p+3p) a) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx.$$

Lösning: a) Sätt

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}.$$

Observera att nämnarens gradtal är större än eller lika med två plus täljarens gradtal samt att $f(x) \neq 0$ då $x \in\mathbf{R}$. Funktionen f har i övre halvplanet endast singulariteter i punkterna

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

och dessa är enkla poler. Sats i boken ger nu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname{Res}(f(z); z_k) = \pi i (\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3})$$

$$= \frac{\pi i}{4}(-z_0 - z_1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leftarrow SVAR$$

b) Låt D vara $\mathbf{C}\setminus\{z;\ \operatorname{Re} z = 0 \text{ och } \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Om $z \in D$ och $z = re^{it}$, där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ definieras $\log_1 z = \ln r + it$. Sätt

$$f(z) = \frac{\log_1 z}{z^4+1} \text{ om } z \in D.$$

Välj $\rho > 1$ och $0 < \varepsilon < 1$. Vi inför nu konturerna

$$C_\rho : z = \rho e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$\alpha : -\rho \leq x \leq -\varepsilon$$

$$\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{it},\ \pi \geq t \geq 0$$

och

$$\beta :\ \varepsilon \leq x \leq \rho.$$

Residusatsen ger att

$$\int_{C_\rho+\alpha+\gamma_\varepsilon+\beta} f(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f(z); z_0) + \operatorname{Res}(f(z); z_1))$$

där

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Här är

$$| \int_{C_\rho} f(z)dz | \leq \pi\rho \frac{\ln\rho + \pi}{\rho^4 - 1} \to 0 \text{ då } \rho \to \infty$$

och

$$| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz | \leq \pi\varepsilon \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon} + \pi}{1 - \varepsilon^4} \to 0 \text{ då } \varepsilon \to 0.$$

Härav följer att

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\rho} f(x)dx + \delta(\rho,\varepsilon) = 2\pi i(\text{Res}(f(z);z_0) + \text{Res}(f(z);z_1))$$

där $\delta(\rho,\varepsilon) \to 0$ då $\rho \to \infty$ och $\varepsilon \to 0$. Alltså är

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln | x | + i\pi}{x^4 + 1} dx + \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx = 2\pi i\left(\frac{i\frac{\pi}{4}}{4z_0^3} + \frac{i\frac{3\pi}{4}}{4z_1^3}\right)$$

dvs

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx + i\pi \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4 + 1} dx = 2\pi i\left(i\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{z_0}{4} - \frac{3z_1}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + 3\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

Genom att identifiera realdelarna i vänster och höger led följer att

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx = -\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{16} \leftarrow SVAR$$

4. (2p) Antag att funktionen f är analytisk och låt $u = \text{Re}\, f$ och $v = \text{Im}\, f$. Visa att funktionerna u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

5. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, ..., s_n$ och

$$\lim_{s \to \infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(g(s)e^{st}; s_k), \;\; t \geq 0$$

har Laplacetransformen $g(s)$.