LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 20 okt 2004, e
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

1. (1p+1p) a) Visa att funktionen $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ är harmonisk. b) Bestäm ett harmoniskt konjugat till funktionen $u(x,y)$. I del b) anges endast svar.

Lösning: a) Det gäller att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)) =$$

$$e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y + \cos y) + e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = 0.$$

b) Antag att funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är analytisk, där funktionen $v(x,y)$ är reellvärd. Då är $f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = u'_x(x,y) - iu'_y(x,y)$ och vi får att

$$f'(z) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) - ie^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y).$$

Alltså är

$$f'(x) = (x+1)e^x, \ x \text{ reellt.}$$

De hela funktionerna $f'(z)$ och $(z+1)e^z$ sammanfaller alltså på x-axeln och är därför enligt känd sats lika. Det följer att $f(z) = ze^z + C$, där C är en komplex konstant. Eftersom $u(0,0) = 0$ blir $C = iE$ där E är en reell konstant. Det följer att $v(x,y) = \text{Im}\{e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) + iE\} = e^x(x\sin y + y\cos y) + E \leftarrow SVAR$

2. (4p) Hur många nollställen räknade med multiplicitet har funktionen

$$g(z) = z\cosh z + 3z^3 + 1$$

i området $| z |< 1$?

Lösning. Definiera $f(z) = -3z^3$ då $z \in \mathbf{C}$. På enhetscirkeln $| z |= 1$ gäller att

$$| f(z) + g(z) |=| z \cosh z + 1 |\leq$$

$$| z || \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) | +1 \leq \frac{1}{2}(| e^z | + | e^{-z} |) + 1 =$$

$$\frac{1}{2}(e^{\mathrm{Re}\, z} + e^{-\mathrm{Re}\, z}) + 1 \leq \frac{1}{2}(e + e^{-1}) + 1 < 3 =| f(z) | .$$

Kom här ihåg att funktionen $\cosh x$, $x \in \mathbf{R}$, är jämn och växande för $x \geq 0$. Rouchés sats ger nu att $g(z)$ och $f(z)$ har lika många nollställen räknade med multiplicitet i området $| z |< 1$. Eftersom $f(z)$ har tre nollställen räknade med multiplicitet i området $| z |< 1$ gäller samma sak för $g(z)$.

3. (4p) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Lösning. Det gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

ty

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 0.$$

Sätt

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

dvs

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}.$$

Om $\rho > 2$ och $C_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, och $I_\rho : z = x$, $-\rho \le x \le \rho$, så ger residusatsen att

$$\int_{C_\rho + I_\rho} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z); 2i) + \mathrm{Res}(f(z); i)).$$

Eftersom $| e^{iz} |= e^{-\mathrm{Im}\, z}$ ger en ML-skattning att

$$| \int_{C_\rho} f(z)dz | \le \frac{\rho}{(\rho^2-4)(\rho^2-1)}\pi\rho \to 0 \text{ då } \rho \to \infty.$$

Alltså är

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z); 2i) + \mathrm{Res}(f(z); i)).$$

Här är

$$\mathrm{Res}(f(z); 2i) = \left[\frac{ze^{iz}}{(z+2i)(z^2+1)}\right]_{|z=2i} = -\frac{1}{6}e^{-2}$$

och

$$\mathrm{Res}(f(z); i) = \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+4)(z+i)}\right]_{|z=i} = \frac{1}{6}e^{-1}.$$

Det följer nu att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{i\pi}{3}(e^{-1} - e^{-2})$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}dx = \frac{\pi}{3}(e^{-1} - e^{-2}) \leftarrow SVAR$$

4. (1p+1p) Sekvensen $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ uppfyller olikheten $| a_n | \le M r_0^n$, $n \in \mathbf{N}$, för lämpliga positiva tal M och r_0.

a) Definiera Z-transformen $\check{a}$ av a (observera att $\check{a} = Z(a)$ med lärobokens beteckningar).

b) Sätt $b = (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$. Visa att

$$\check{b}(z) = z\check{a}(z) - za_0.$$

5. (3p) De reellvärda och kontinuerligt deriverbara funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är definierade i en domän D och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i en punkt (x_0, y_0) som tillhör D. Visa att funktionen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

är en deriverbar funktion av $z = x + iy$ i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$.