LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 17 aug 2005 fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
– –

1. (2p) Antag

$$f(z) = \frac{z \cos 2z}{2z^2 + 1}.$$

Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

där γ betecknar den positivt orienterade enhetscirkeln i z-planet. Angiv endast svar!

Lösning: Funtionen $f(z)$ har enkla nollställen i $z = 0$ och $z = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, och enkelpoler i $z = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$. Notera att $f(z)$ saknar nollställen och poler på γ. Enligt känd sats (sid 173) är integralens värde I lika med $2\pi i(N - P)$, där N är antalet nollställen för f i enhetscirkelskivan räknade med multiplicitet och P är antalet poler för f i enhetscirkelskivan räknade med multiplicitet. Alltså är $I = 2\pi i(3 - 2) = 2\pi i \leftarrow SVAR$.

2. (4p) Bestäm den sekvens $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ som har Z-transformen

$$\frac{z^2}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}.$$

(Ledning: Om c är ett komplext tal skilt från noll och $b_n = 0$ för $n < 0$ och $b_n = c^n$ för $n \geq 0$ så har sekvensen $(b_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ Z-transformen $\frac{z}{z-c}$.)

Lösning: Det gäller att

$$\frac{z}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{2}{z+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{z+3}$$

varför

$$\frac{z^2}{z^3+6z^2+11z+6}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} + 2\frac{z}{z+2} - \frac{3}{2}\frac{z}{z+3}.$$

Ledningen ger nu för stora $\mid z \mid$ att

$$\frac{z^2}{z^3+6z^2+11z+6}$$

$$= -\frac{1}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} + 2\Sigma_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n} - \frac{3}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(-3)^n z^{-n}$$
$$= \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

där

$$a_n = (-1)^n(-\frac{1}{2} + 2^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2}) \text{ för } n \geq 0 \leftarrow SVAR$$

och

$$a_n = 0 \text{ för } n < 0 \leftarrow SVAR$$

3. (4p) Det reella talet a är skilt från noll. Beräkna

$$\int_0^{\pi} \tan(x+ia)dx.$$

Lösning: Det gäller att

$$\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$
$$= \frac{2i}{e^{2iz}+1} - i$$

och

$$\int_0^{\pi} \frac{2i}{e^{2i(x+ia)}+1}dx = \int_0^{\pi} \frac{2ie^{2a}}{e^{2ix}+e^{2a}}dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{2a}}{e^{it}+e^{2a}}dt.$$

Om C betecknar den positivt orienterade enhetscirkeln gäller därför enligt residusatsen att

$$\int_0^\pi \frac{2i}{e^{2i(x+ia)}+1}dx = \int_C \frac{e^{2a}dz}{z(z+e^{2a})}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i(1-1) = 0 \text{ om } a < 0 \\ 2\pi i \text{ om } a > 0 \end{cases} .$$

Härav följer att

$$\int_0^\pi \tan(x+ia)dx = \begin{cases} -i\pi \text{ om } a < 0 \\ i\pi \text{ om } a > 0 \end{cases} \leftarrow SVAR$$

4. (2.5p) Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

5. (2.5p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i området $0 <\mid z - z_0 \mid< r$. Visa att om funktionen $\mid f(z) \mid$ är begränsad i en punkterad omgivning av z_0 så finns en i området $\mid z - z_0 \mid< r$ konvergent potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ vars summa i punkten $z \neq z_0$ är lika med $f(z)$.