MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2006-08-23, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvak terna.
Telefonvakt: , tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

1. Använd z-transform för att lösa differensekvationen

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1. \qquad (6p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (6p)

(b) Beräkna $\hat{f}(0)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Givet är funktionen

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1}.$$

Finn f:s singulariteter och avgör deras karaktär. (3p) Bestäm de t re första (icke-noll) termerna i f:s Laurentutveckling i området $|z| > 1$. (5p)

4. Se nästa sida.

5. Se nästa sida.

6. Låt funktionen f vara analytisk i området D och antag att f har n olika nollställen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i D med respektive multiplicitet $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Visa att det finns en funktion g som är analytisk i D och sådan att

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_n)^{m_n} g(z), \qquad \forall z \in D.$$

Vad ska man lägga till i förutsättningarna för att kunna påst å att även $\frac{1}{g}$ är analytisk i D? (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylo rutveckling (= potensserieutveckling) kring en godtycklig punkt z_0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området mellan cirklarna $\{|z| = 2\}$ och $\{|z-1| = 1\}$. (6p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området mellan cirklarna $\{|z| = 2\}$ och $\{|z-1| = 1\}$. (6p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Finn en funktion $f = f(z)$ som är analytisk i det övre halvplanet och vars realdel är $u(x, y) = \ln((x+1)^2 + y^2)$. (6p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 5. Funktionen f är analytisk i $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, kontinuerlig i $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, och $f(0) = 0$. Visa att serien

$$f(z) + f(z^2) + \ldots + f(z^n) + \ldots$$

är konvergent. (7p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 5. Ange en funktion $f = f(z)$ sådan att f är analytisk i $\mathbb{C} \setminus (\{z : \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{-1\} \cup \{i\})$, har dubbelpol i i och väsentlig singularitet i -1. Ange i vilka områden man kan Laurentutveckla f. (7p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 5. Ange en funktion $f = f(z)$ sådan att f är analytisk i $\mathbb{C} \setminus (\{z : \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{-1\} \cup \{i\})$, har dubbelpol i i och väsentlig singularitet i -1. Ange i vilka områden man kan Laurentutveckla f. (7p)

/JM

MVE 025 / TMA 253 / TMA 252

Komplex matematisk analys F/Kf

23/8 - 06 - Lösningar

1. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$a_0 = 1, \quad a_1 = -1$

$\xrightarrow{z\text{-tr.}} \quad z^2 A(z) - z^2 \cdot 1 - z \cdot (-1) -$

$- 3\left(zA(z) - z \cdot 1\right) + 2A(z) = 0$

$$A(z) = \frac{z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2} = z \frac{z-4}{(z-1)(z-2)} =$$

$$= z\left(\frac{3}{z-1} + \frac{-2}{z-2}\right) =$$

$$= 3\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - 2\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = 3\sum_0^\infty z^{-n} - 2\sum_0^\infty 2^n z^{-n} =$$

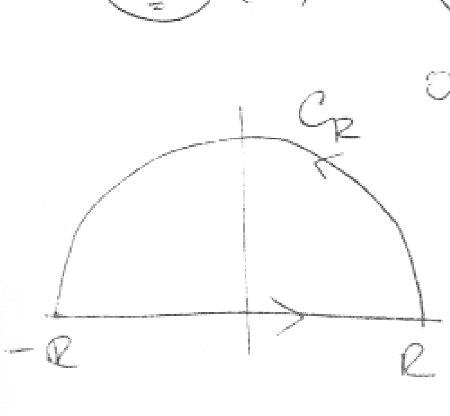
$$= \sum_0^\infty \left(3 - 2^{n+1}\right) z^{-n}$$

$$\Rightarrow a_n = 3 - 2^{n+1}, \quad n \geq 0.$$

---

2. (a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

(jämn integrand)



Låt $R > a$; $f(z) = \frac{1}{z^4 + a^4}$.

(man kan välja kontur i ö.h.p. eller i n.h.p.)

$$C_R = \{ z \, | \, |z| = R, \ \theta \in [0, \pi] \}$$

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4 + a^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + a^4}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} \right| \underset{(z = Re^{i\theta})}{=} \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta} \, d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + a^4} \right| \leq$$

$$\leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4 - a^4} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \Rightarrow \int_{C_R} f(z) \, dz \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4 + a^4} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f$$

$$z^4 + a^4 = 0 \qquad z^4 = a^4 e^{i\pi}$$

$$z_k = a e^{i(\pi + 2k\pi)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= a e^{i\pi/4} = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ z_1 &= a e^{i3\pi/4} = a \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \right\} \in \text{öhp}$$

$$z_2, z_3 \in \text{uhp}$$

z_0, z_1 enkelpoler till f

$$\operatorname{Res}_{z_{0,1}} f = \frac{1}{4 z_{0,1}^3} = -\frac{z_{0,1}}{4a^4}$$

(3)

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \text{Res}\, f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4a^3}\right)\left(\frac{a}{\sqrt2} + i\frac{a}{\sqrt2} - \cancel{\frac{a}{\sqrt2}} + i\frac{a}{\sqrt2}\right) =$$

$$= \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}a^3\cancel{\sqrt2}} \cdot \cancel{2}\sqrt2 = \frac{\pi\sqrt2}{2a^3}$$

Låt $R \to \infty$: $\frac{\pi\sqrt2}{2a^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4} + 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{\pi\sqrt2}{4a^3}$$

(b) $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ix\cdot 0}}_{=1} \frac{1}{x^4+a^4}\,dx =$ $(a=\sqrt2)$

$= [\text{enligt (a)}] = \frac{\pi\sqrt2}{2\cdot(\sqrt2)^3} = \frac{\pi}{4}$

(3.) $e^{\frac{1}{z}}$: $z = 0$ väsentlig singularitet

$\frac{\cdots}{\underbrace{z^2-1}_{=(z-1)(z+1)}}$: $z = \pm 1$ enkelpoler

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right)$$

för $|z|^{-1} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

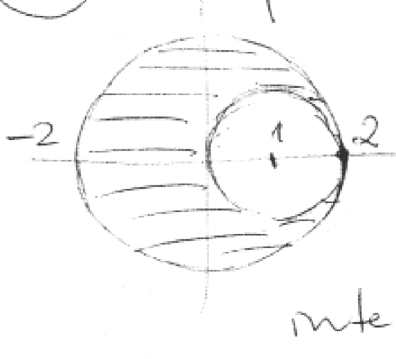
$|z| > 1$, f

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^4} + \left(\frac{1}{6} + 1\right)\frac{1}{z^5} + \ldots$$

4. ("nya" kursen)

(z)



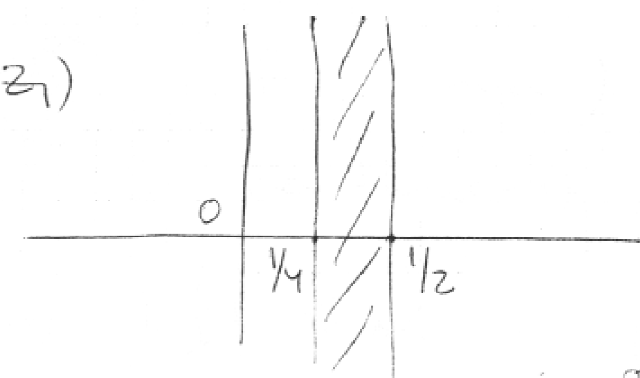
Möbiusavbildning s.a. $2 \to \infty$ $\Rightarrow$ båda cirklarna avbildas på räta linjer som inte har ngn annan pkt än ∞ gemensam, d.v.s., som är parallella

$$z_1 = \frac{1}{2-z}$$

$2 \to \infty$
$0 \to \frac{1}{2}$
$-2 \to \frac{1}{4}$; $-1 \to \frac{1}{3}$
Re $\to$ Re

cirklarna $\perp$ realaxeln $\Rightarrow$ de parallella linjerna i z_1-planet $\perp$ Re-axeln

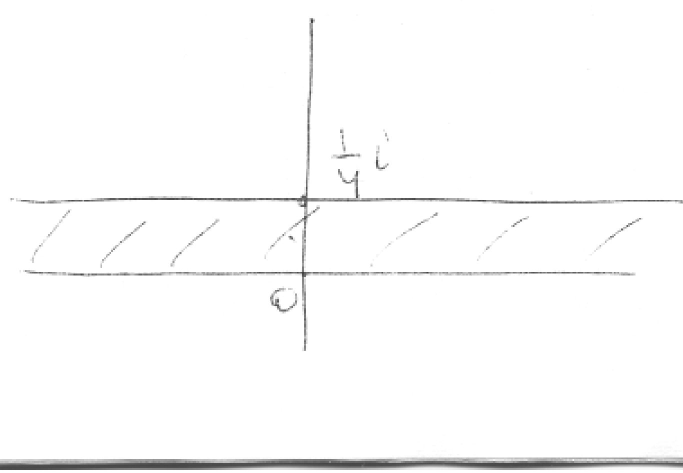
(z_1)



$$z_2 = \left(z_1 - \frac{1}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} = i\left(z_1 - \frac{1}{4}\right)$$

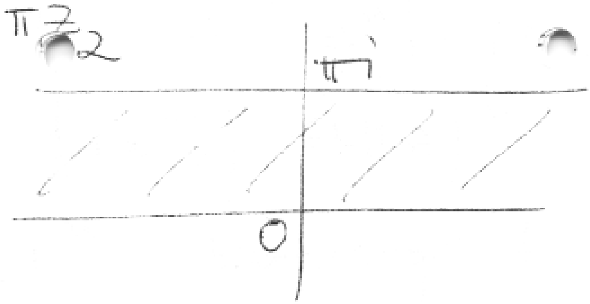
rotation $+\frac{\pi}{2}$

(z_2)

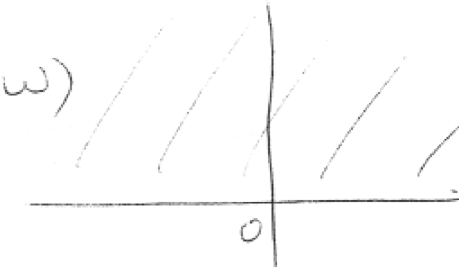


$z_3 = 4\pi z_2$

(z_3)



(w)



$w = e^{z_3} =$

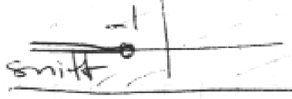
$= e^{\mathrm{Re}\, z_3} \cdot e^{i\, \mathrm{Im}\, z_3}$

$0 < \mathrm{Im}\, z_3 < \pi$

(4.) ("gamla" kursen)

$u(x,y) = 2 \ln|z+1| = 2\mathrm{Re}(\mathrm{Log}(z+1))$

$\Rightarrow f(z) = \underbrace{2\,\mathrm{Log}\,(z+1)}_{\text{analytisk i öhp}} (+\ Ci) \quad C \in \mathbb{R}$



(5.) (F, "nya")

f kontinuerlig i $\underbrace{\{|z| \le 1\}}_{\text{kompakt}}$

$\Rightarrow |f| \le M$ i $\{|z| \le 1\}$

Betrakta $\tilde{f}(z) = \frac{1}{M} f(z)$

$\tilde{f}$ uppfyller förutsättningarna i Schwarz lemma

$\Rightarrow |\tilde{f}(z)| \le |z| \quad \forall z : |z| < 1$

$\Rightarrow |f(z)| \le M|z| \quad \forall z : |z| < 1$

$$|z| < 1 \iff |z^n| = |z|^n < 1$$

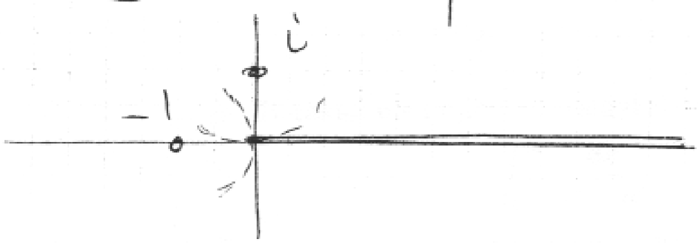
$$\Rightarrow \quad |f(z^n)| \leq M|z|^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n$ konvergent för $|z|<1$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ konvergent för $|z|<1$

---

5. (F "gamla", Kf)



Tag $f(z) = \log_* z + \dfrac{1}{(z-i)^2} + e^{\frac{1}{z+1}}$,

där $\log_*$ är en analytisk gren av log med snittet längs positiva Re-axeln

Laurentutvecklingar: kring i och -1 i områdena

$$0 < |z-i| < 1$$

$$0 < |z+1| < 1$$

---

6. induktivt resonemang (ändligt)

$$f(z) = \underbrace{(z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_k)^{m_k}}_{\neq 0 \text{ i } z_{k+1}} g_k(z) \Rightarrow g_k(z_{k+1}) = 0 \quad \ldots$$