MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2007-08-22, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Använd z-transform för att lösa differensekvationen

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \qquad \text{(6p)}$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos ax}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 10x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{(2p)}$$

3.(a) Bestäm antalet nollställen till funktionen $f(z) = z^5 - 5z + 3$ i cirkelringen $\frac{1}{2} \le |z| \le 1$. (3p)

(b) Bestäm antalet nollställen till samma funktion i det högra halvplanet. (3p)

4. Se nästa sida.

5. Fibonaccis talföljd definieras som följer

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Betrakta funktionen $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$.

(a) Visa att f är en rationell funktion. (3p)

(b) Använd f för att ge en explicit formel för elementen i Fibonaccis talföljd. (4p)

6. Låt a, b, c vara komplexa tal. Gäller likheten $(a^b)^c = a^{bc}$? Motivera! (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring punkten $z_0 = 0$ (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området $\{|z| < 1\} \cap \{|z-1| < 1\}$. (6p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området $\{|z| < 1\} \cap \{|z-1| < 1\}$. (6p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Ange två Laurentutvecklingar för funktionen

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2 + 5z + 6}$$

kring 0. Redogör noga för var de konvergerar. (6p)

/JM

Komplex matematisk analys F/Kf

MVE025, TMA253, TMA252

Lösningar 22/8-07

1. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\left| \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{array} \right.$

$\underset{(z4)}{\Rightarrow}$ $z^2 A(z) - z^2 \cdot 0 - z \cdot 1 =$

$= z A(z) - z \cdot 0 + A(z)$

$\Rightarrow A(z) = \dfrac{z}{z^2 - z - 1} = \dfrac{A_1}{z - z_1} + \dfrac{A_2}{z - z_2}$

$z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$z = A_1 (z - z_2) + A_2 (z - z_1)$

$z = z_1:$ $\quad z_1 = A_1 (z_1 - z_2)$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = A_1 (-\sqrt{5})$ $\quad A_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

$z = z_2:$ $\quad z_2 = A_2 (z_2 - z_1)$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = A_2 \cdot \sqrt{5}$ $\quad A_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

$\underset{(z9)}{\Rightarrow}$ $\underset{n \geq 1}{a_n} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} =$

$= \dfrac{1}{2^n \sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right)$

$n \geq 1$.

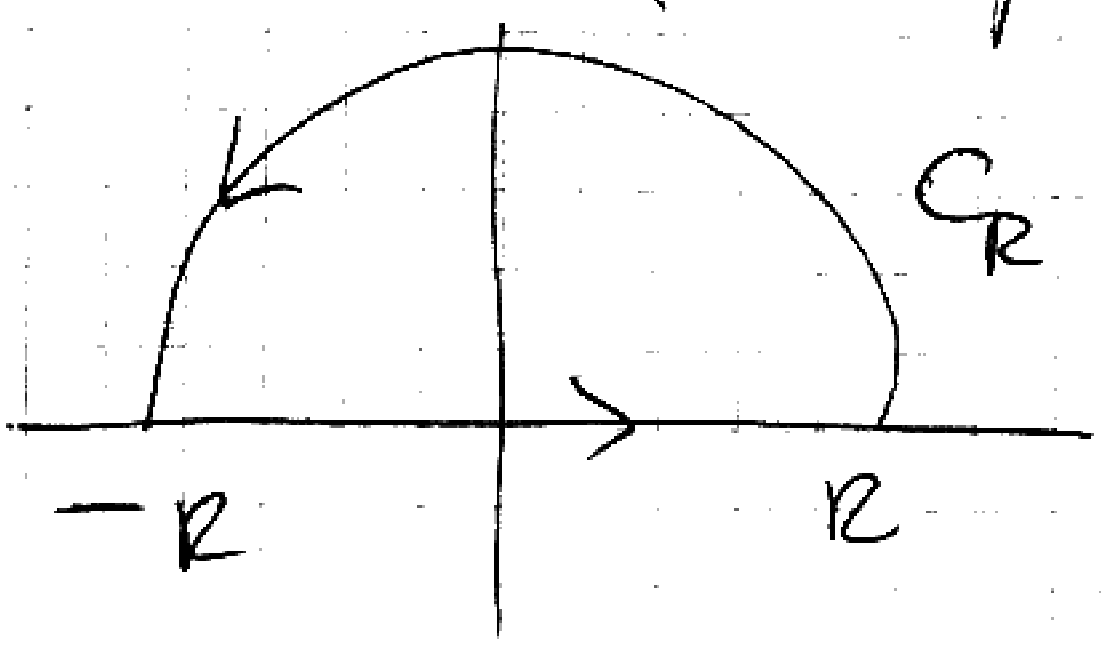
(Fibonaccitalen)

$\textcircled{2}$ Sätt: $f(z) = \dfrac{z^2 e^{i|a|z}}{z^4+10z^2+9}$

$(\cos ax = \cos |a|x$, ty cos jämn$)$

$$z^4+10z^2+9 = (z^2+5)^2-16 =$$
$$= (z^2+5+4)(z^2+5-4) = (z^2+9)(z^2+1)$$

$\Rightarrow$ f har poler i $\pm 3i$ och $\pm i$ (enkelpoler)



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ (i öhp, ty $|a| \geq 0$)

$R > 3$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{3i} f + \operatorname*{Res}_{i} f\right) =$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{i|a|x}}{x^4+10x^2+9}\,dx} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{x^2 \cos ax}{x^4+10x^2+9}\,dx, \text{ ty } \frac{x^2 \sin |a|x}{x^4+10x^2+9} \text{ udda}$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \underset{\substack{z=Re^{i\theta} \\ 0\leq\theta\leq\pi}}{=} \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iR|a|\cos\theta} \cdot e^{-R|a|\overbrace{\sin\theta}^{\geq 0}} iRe^{i\theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 10R^2 e^{2i\theta} + 9}\,d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot R \cdot 1}{R^4 - 10R^2 - 9}\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi R^3}{R^4 - 10R^2 - 9} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{i|a|x}}{x^4+10x^2+9}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\frac{x^2\cos ax}{x^4+10x^2+9}}^{\text{jämn}}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{x^2\cos ax}{x^4+10x^2+9}\,dx = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{3i} f + \operatorname*{Res}_{i} f\right)$$

$$= 2\pi i\left(\left.\frac{z^{\cancel{2}} e^{i|a|z}}{4z^{\cancel{3}2}+20\cancel{z}}\right|_{z=3i} + \left.\frac{z^{\cancel{2}} e^{i|a|z}}{4z^{\cancel{3}2}+20\cancel{z}}\right|_{z=i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3i\,e^{-3|a|}}{-36+20} + \frac{i\,e^{-|a|}}{-4+20}\right) =$$

$$= \cancel{2}\pi\,\frac{3e^{-3|a|} - e^{-|a|}}{\cancel{16}\;8}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^2\cos ax}{x^4+10x^2+9}\,dx = \frac{3e^{-3|a|} - e^{-|a|}}{16}$$

(b) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-ix\xi}}{x^4+10x^2+9}\,dx \overset{\text{som ovan}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{ix|\xi|}}{x^4+10x^2+9}\,dx = \frac{3e^{-3|\xi|} - e^{-|\xi|}}{8}$$

---

3. (a) Rouchés sats används

På $\{|z|=1\}$: $f(z) = -5z$

$g(z) = z^5 + 3$

$|f| = 5$, $|g| = |z^5+3| \le |z^5| + |3| = 4 < |f|$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har lika många nollställen innanför, d.v.s. ett

På $\{|z| = \frac{1}{2}\}$: $f(z) = 3$

$g(z) = z^5 - 5z$

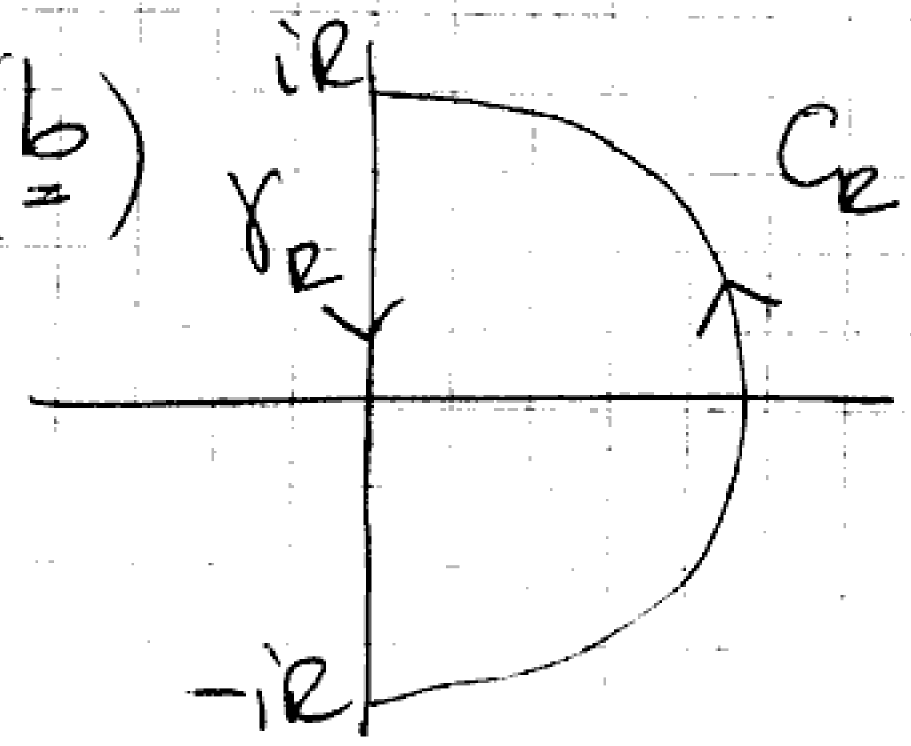
$$|f| = 3, \quad |g| = |z^5 - 5z| \leq |z^5| + 5|z| = \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2} < 3$$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har lika många nollställen innanför, d.v.s. inga

$\Rightarrow$ $z^5 - 5z + 3$ har ett nollställe i cirkelringen $\{\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$

(av uppskattningarna följer att det inte finns några nollställen på själva cirklarna).

(b)



$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$

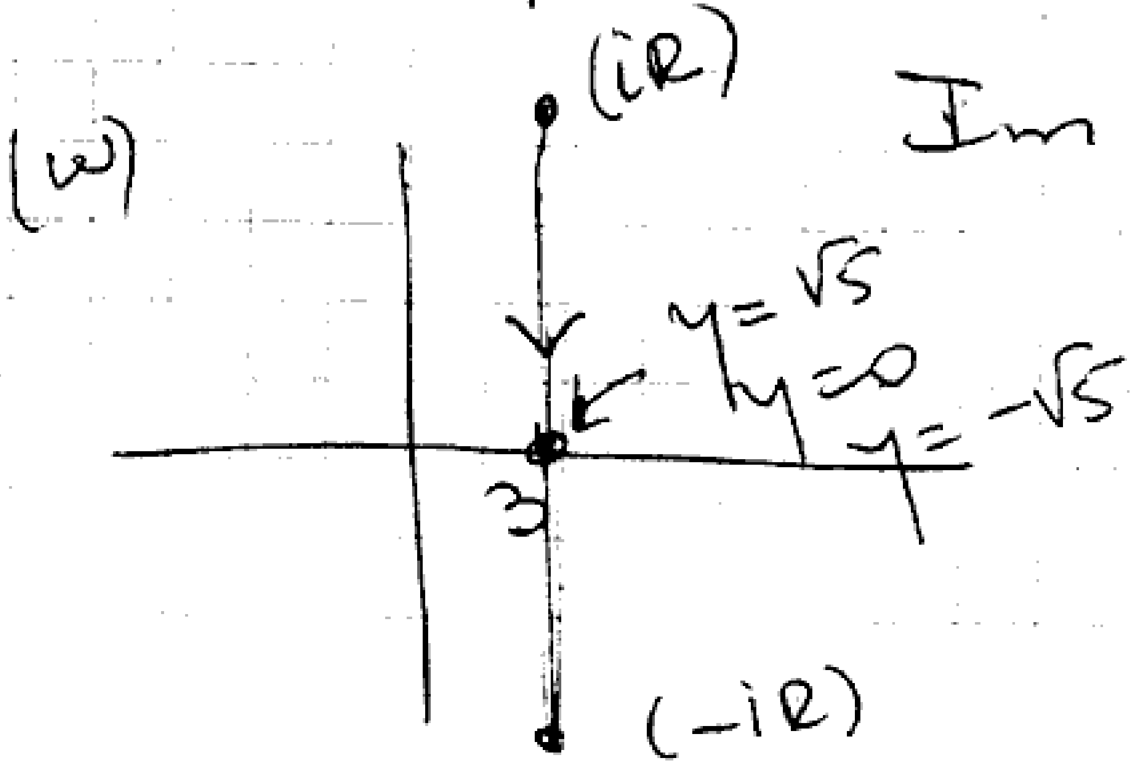
$\gamma_R = \{iy : \underleftarrow{-R \leq y \leq R}\}$

Argumentprincipen används:

$\gamma_R : z = iy$, $\underleftarrow{-R \leq y \leq R}$: $f(z) = z^5 - 5z + 3$

$\operatorname{Re} f(iy) = 3$

$\operatorname{Im} f(iy) = y^5 - 5y$

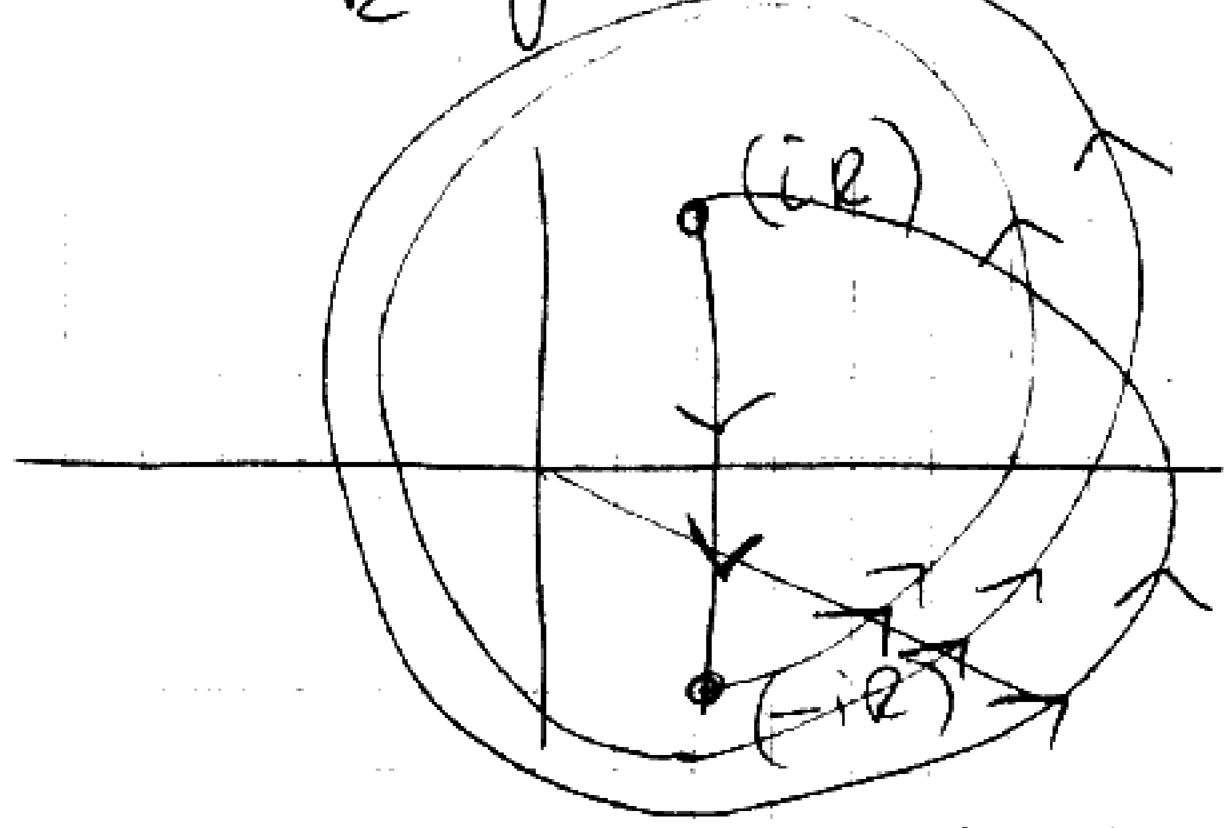


$\Rightarrow$ γ_R avbildas på en sträcka $\subset \{\operatorname{Re} w = 3\}$, riktad nedåt / uppåt / nedåt

C_R : $z = Re^{i\theta}$:
$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$f(z) = R^5 e^{5i\theta}\underbrace{\left(1 - \frac{5e^{-4i\theta}}{R^4} + \frac{3e^{-5i\theta}}{R^5}\right)}_{\text{mycket nära 1 för stora } R}$$

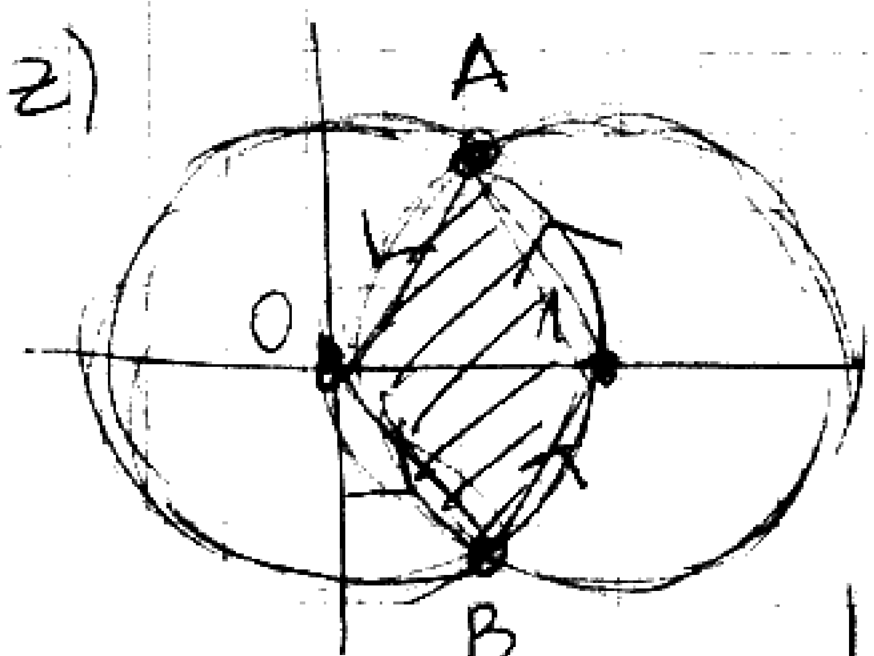
$\Rightarrow \Delta_{C_R} \arg f(z) \approx \Delta_{C_R} \arg R^5 e^{5i\theta} = 5\pi$ för stora R



två varv runt origo

$\Rightarrow f$ har två nollställen i hhp

4!. (z)



Trianglarna med hörn $(0; 1; A)$ resp. $(0; 1; B)$ är liksidiga med sida 1

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(alternativt kan man lösa systemet
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$
)

$A \to 0$
$B \to \infty$

$$z_1 = \frac{z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

båda cirklarna $\to$ räta linjer genom O

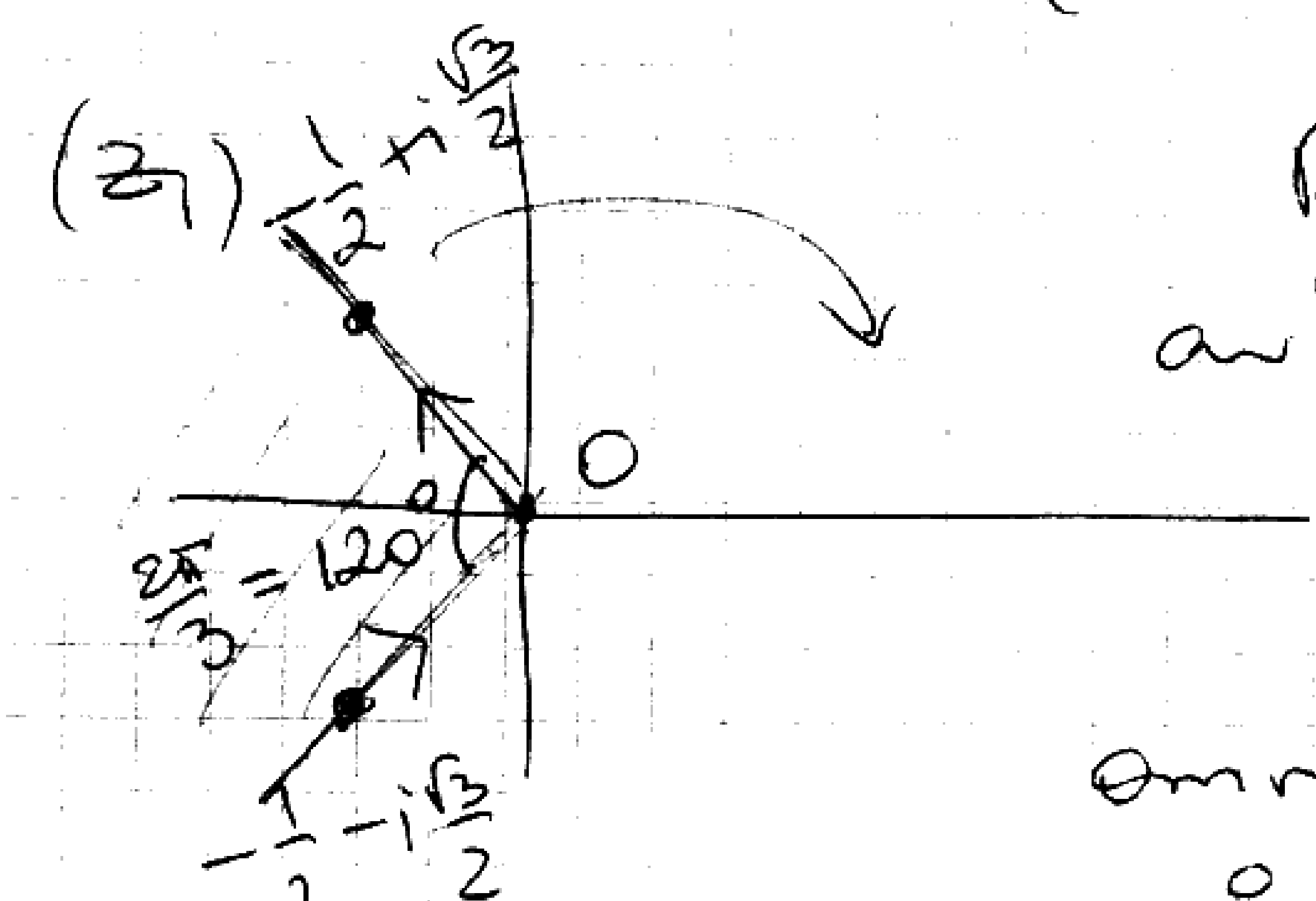
$$0 \to \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \to \frac{1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(konjugatet till bilden av 0)



Riktningen $A \to 0 \to B$ avbildas på $0 \to -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \to \infty$ (analogt för den andra strålen); området ska då vara på vänster sida

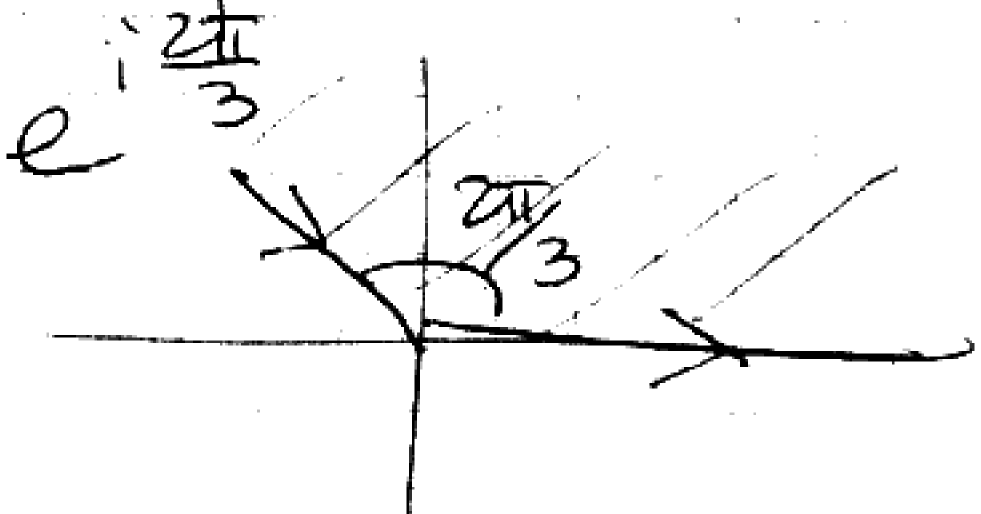
$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Rotation $\quad z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot z_1$

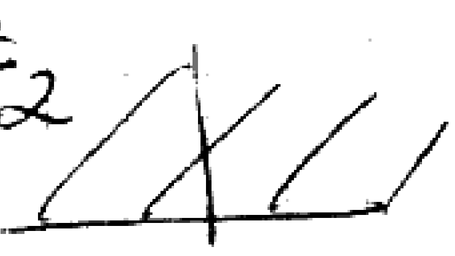
$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

(vinklarna kan även fås i den ursprungliga figuren med ett geometriskt resonemang)

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} \to e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



$w = z_2^{3/2}$



4'' $$f(z) = \frac{z-1}{(z+2)(z+3)} =$$

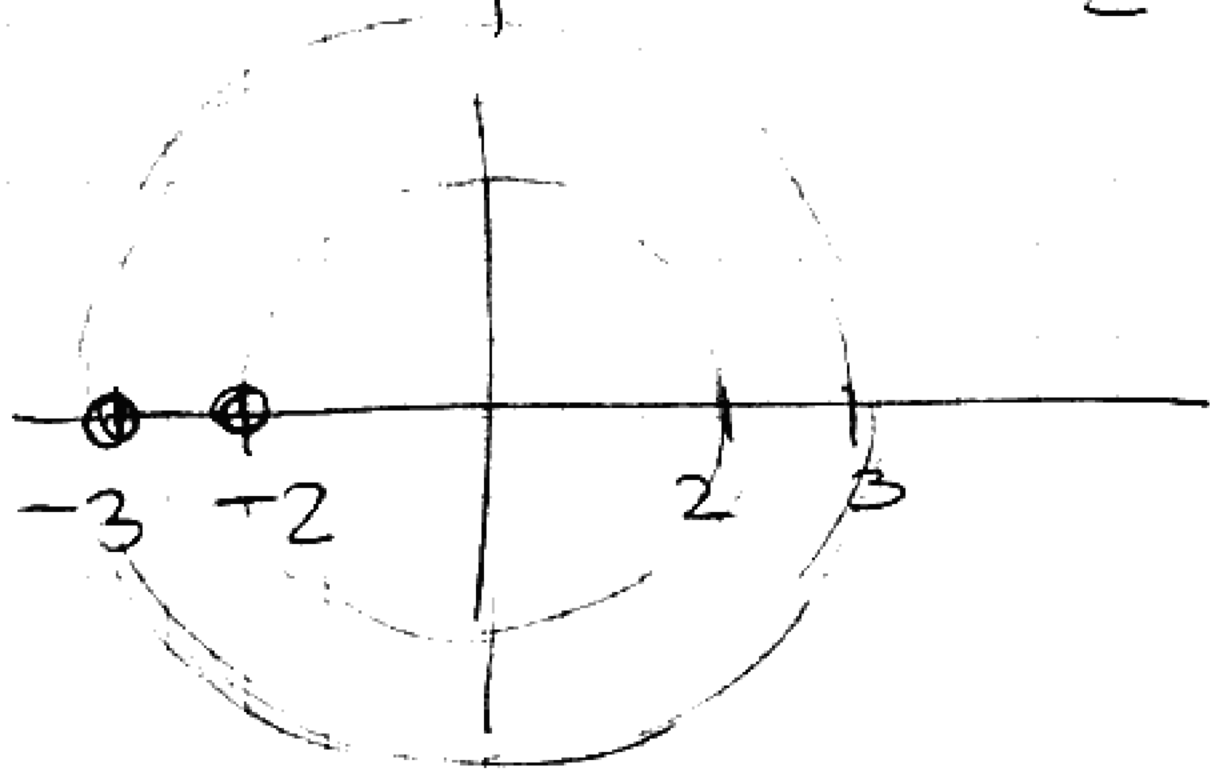
$$= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3}$$

$$z-1 = A(z+3) + B(z+2)$$

$z=-2$: $A = -3$

$z=-3$: $B = 4$

$$f(z) = \frac{4}{z+3} - \frac{3}{z+2}$$



(1) i $2 < |z| < 3$:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} =$$

$$= \left(\left|\frac{z}{3}\right| < 1\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \dots\right)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \underset{\left|\frac{2}{z}\right|<1}{=} \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots\right)$$

(kombineras till f)

(2) i $|z| > 3$

$\frac{1}{z+2}$: samma som ovan

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z}} \underset{\left|\frac{3}{z}\right|<1}{=} \frac{1}{z}\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \dots\right)$$

(5.) $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ (8)

$$= 0 + z + (0+1)z^2 + (1+1)z^3 + \dots + (a_{n-2} + a_{n-1}) z^n + \dots =$$

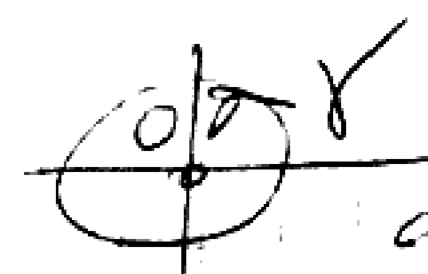
$$= 0 + z + \sum_2^\infty a_{n-2} z^n + \sum_2^\infty a_{n-1} z^n =$$

$$= z + z^2 \sum_0^\infty a_k z^k + z \underbrace{\sum_1^\infty a_k z^k}_{= \sum_0^\infty a_k z^k} =$$

$$= z + z^2 f(z) + z f(z)$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{-z}{z^2 + z - 1} \quad - \text{ rationell funktion}$$

Kalkylen ovan är formell; för att göra den stringent måste man undersöka de inblandade potensseriernas konvergensradier. Alla serier ovan har samma konvergensradie som f, eftersom de skiljer sig från f med en faktor z eller z^2, vilket gör att man kan lägga ihop dem termvis innanför konvergenscirkeln!



f analytisk på och innanför γ

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z^n (z^2 + z - 1)} =$$

$$= -\operatorname*{Res}_0 \frac{1}{z^n (z^2 + z - 1)}$$

Låt z_1, z_2 vara nollställena till z^2+z-1; partialbråksuppdelning 9

$$\frac{1}{z^2+z-1} = \frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{z_1-z_2}\left(-\frac{1}{z_1}\left(1+\frac{z}{z_1}+\dots+\frac{z^{n-1}}{z_1^{n-1}}+\dots\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z_2}\left(1+\frac{z}{z_2}+\dots+\frac{z^{n-1}}{z_2^{n-1}}+\dots\right)\right) =$$

$$= \dots + \frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z_2^n} - \frac{1}{z_1^n}\right)\cdot z^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^n(z^2+z-1)} = \dots + \underbrace{\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z_2^n} - \frac{1}{z_1^n}\right)}_{= \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^n(z^2+z-1)}} \frac{1}{z} + \dots$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z_2^n} - \frac{1}{z_1^n}\right)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad z_1 - z_2 = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2^n}{(\sqrt{5}-1)^n} - \frac{(-1)^n 2^n}{(\sqrt{5}+1)^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\cancel{2^n}(\sqrt{5}+1)^n}{2^{\cancel{2}n}} - \frac{(-1)^n \cancel{2^n}(\sqrt{5}-1)^n}{2^{\cancel{2}n}}\right)$$