MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf
Datum: 2008-01-15, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Marcus Warfheimer, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.

==

1. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}. \qquad (7p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3.(a) Bestäm antalet nollställen till funktionen $f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$ i det högra halvplanet. Gör så mycket du kan för att lokalisera dessa. (max 4p)

(b) Finn en cirkelring som innehåller alla funktionens nollställen. (3p)

4. Ange Laurentutvecklingen kring $z_0 = 1$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)(z+4)},$$

i det område som innehåller punkten $3 - i$. (6p)

5. Visa att $\max_{|z|\le 1} |az^n + b| = |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{C}$. (6p)

6. Härled formler 14 och 16 i Laplacetransformtabellen. Du får inte använda formler i tabellen vid härledningen, utan måste använda definitionen. (5p)

7. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

8. Se nästa sida.

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 8. Antag att funktionen $g = g(s)$ är analytisk i hela s-planet utom i ändligt många singulära punkter s_k, samt att $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{s_k}(g(s)e^{st})$$

har en Laplacetransform, d.v.s. visa att det finns konstanter M och a sådana att $|f(t)| \leq Me^{at}$. (5p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06 & 06/07) 8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

/JM

MVE025 (TMA252, TMA253)

Komplex matematisk analys F/Kf

Lösningar 15/11-08

1. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$; Sätt $\varphi = 2\theta$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi}{1+\frac{1+\cos\varphi}{2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3+\cos\varphi}$$; Sätt $z = e^{i\varphi}$

$\varphi \in [0, 2\pi]$ motsvarar
z beskriver enhetscirkeln
ett varv moturs

$$dz = i e^{i\varphi} d\varphi \qquad d\varphi = \frac{1}{iz}\,dz$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3+\underbrace{\cos\varphi}_{=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}}} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz}\,dz}{3+\frac{z+1/z}{2}} =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2+6z+1} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z+3-2\sqrt{2})(z+3+2\sqrt{2})}$$

$$z^2+6z+1 = (z+3)^2 - 8 = (z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})$$

$|-3-2\sqrt{2}| > 1$ utanför cirkeln

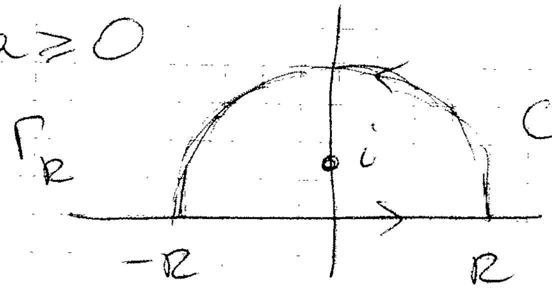
$|-3+2\sqrt{2}| < 1$ innanför cirkeln

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{2}{i} \left. \frac{1}{z+3+2\sqrt{2}} \right|_{z=-3+2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

enligt Cauchys integralformel

(2.) (a) Sätt $f(z) = \dfrac{z^2 e^{iaz}}{(z^2+1)^2}$ $\quad (\cos ax = \operatorname{Re} e^{iax})$ $\quad$ 2

$a \geq 0$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$C_R : \begin{cases} |z| = R \ (>1) \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$

f har en dubbelpol i $z_0 = i$ innanför Γ_R

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{iax}}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{(R^2 e^{2i\theta}+1)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta \right| \leq$$

$|e^{i\cdot \text{reellt}}| = 1$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{1 \cdot 1 \cdot e^{-aR\sin\theta}}{(R^2-1)^2} R^3\,d\theta = \circledast$$

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 0 \\ \sin\theta \geq 0 \text{ i } [0,\pi] \\ R > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -aR\sin\theta \leq 0 \Rightarrow e^{-aR\sin\theta} \leq 1$$

$$\Rightarrow \circledast \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{(R^2-1)^2}\,d\theta = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{iax}}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{iax}}{(x^2+1)^2}\,dx \quad \text{(konvergent)}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} f =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z^2 e^{iaz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2} \cancel{(z-i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \left. \frac{\left(2ze^{iaz} + z^2\, ia e^{iaz}\right)(z+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i)}\, z^2 e^{iaz}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}} \right|_{z=i} =$$

$$= \cancel{2}\pi \cancel{i}\, \frac{\left(2ie^{-a} - iae^{-a}\right)\cancel{2}i + \cancel{2}e^{-a}}{-_2\cancel{8}\cancel{i}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-2e^{-a} + ae^{-a} + e^{-a}\right) =$$

$$= \frac{\pi(1-a)e^{-a}}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}(\ldots) = \frac{\pi(1-a)e^{-a}}{2}$$

$a < 0$: $\cos ax = \cos|a|x$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi(1-|a|)e^{-|a|}}{2} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

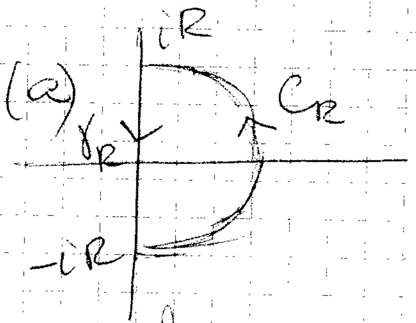
(b) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} e^{-ix\xi}\,dx =$$

$=$ ovanstående integral för $a = -\xi$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi(1-|\xi|)e^{-|\xi|}}{2}$$

---

3 (a)



$f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$

γ_R : $f(iy) = y^4 - 2iy^3 - 3y^2 + iy + 2$

$\mathrm{Re}\, f(iy) = y^4 - 3y^2 + 2 = (y^2-1)(y^2-2)$

$\mathrm{Im}\, f(iy) = -y(2y^2-1)$

$\mathrm{Re} = 0$ för $y = \pm 1, \pm\sqrt{2}$

$\mathrm{Im} = 0$ för $y = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

4

C_R: θ beskriver $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

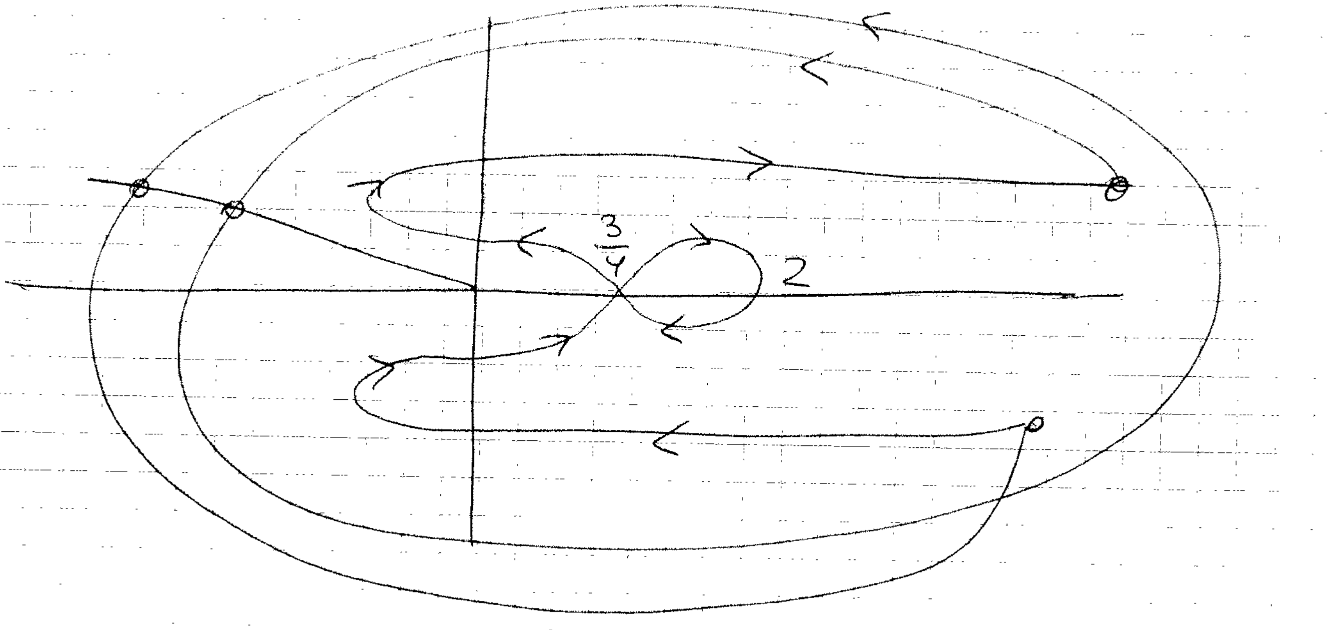
$$f(Re^{i\theta}) = R^4 e^{4i\theta}\Big(1 + \underbrace{\frac{\cdots}{R}}_{\swarrow R\to\infty \; 0}\Big)$$

$\Rightarrow \Delta_{C_R} \arg f(z) \approx 4\pi$ (2 varv)

γ_R: y	$-\infty$		$-R$		$-\sqrt{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\sqrt{2}$		R	∞
Re f	$+\infty$		$+$		0	$-$	0	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	2	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$	0		$+$	$+\infty$
Im f	$+\infty$		$+$		$3\sqrt{2}$		1	$+$	0	$-$	0	$+$	0		-1		$-3\sqrt{2}$		$-$	$-\infty$
	I kv.																			IV kv.

för ~~stora~~ R: $\text{Re} f \gg |\text{Im} f|$

$\Rightarrow$ börjar och slutar nära Re-axeln



$\Rightarrow$ 2 varv runt origo

$\Rightarrow$ 2 nollställen i hhp

reella, positiva $\}$ koefficienter $\Rightarrow$ inga reella positiva nollställen, två komplexkonjugerade i I o IV kv.

(3b) Vi vill hitta cirklar på vilka 2 resp. z^4 är dominanta. (5)

$|z| = \frac{1}{2}$: $F(z) = 2$

$G(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z$

$|F| = 2$ på $\{|z| = \frac{1}{2}\}$

$|G| \leq |z|^4 + 2|z|^3 + 3|z|^2 + |z| =$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} < 2 = |F|$

på $\{|z| = \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow$ F och $f = F + G$ har lika många nollställen innanför $\{|z| = \frac{1}{2}\}$, d.v.s. 0 (inga på cirkeln – följer av uppskattningen)

$|z| = 4$: $F(z) = z^4$

$G(z) = 2z^3 + 3z^2 + z + 2$

$|F| = 256$

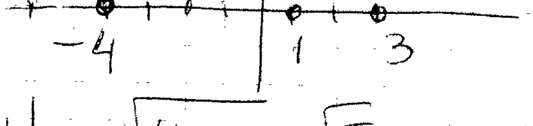
$|G| \leq 2 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 4 + 2 = 182 < |F|$

på $\{|z| = 4\}$

$\Rightarrow$ F och $F + G = f$ har lika många nollställen innanför $\{|z| = 4\}$, d.v.s. 4 st. (inga på cirkeln)

$\Rightarrow$ cirkelringen $\frac{1}{2} < |z| < 4$ innehåller f:s alla nollställen.

(4.)



Laurentutvecklingar kring 1 : i cirkelringarna

$|3 - i - 1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\longrightarrow 2 < |z-1| < 5$

$|z-1| > 5$

Vi behöver utvecklingen i

$$2 < |z-1| < 5$$

$$\frac{z}{(z-3)(z+4)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+4}$$

$$z = A(z+4) + B(z-3)$$

$z = 3$: $\quad 3 = 7A \quad A = 3/7$

$z = -4$: $\quad -4 = -7B \quad B = 4/7$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(1 + \frac{2}{z-1} + \ldots + \frac{2^n}{(z-1)^n} + \ldots\right)$$

konvergent för

$$\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{(z-1)+5} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{z-1}} =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(1 - \frac{5}{z-1} + \ldots\right)$$ konvergent för $|z-1| > 5$ - FEL!

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{5+(z-1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{z-1}{5} + \ldots + \frac{(z-1)^n}{5^n} + \ldots\right)$$

konvergent för $|z-1| < 5$ OK

Addition ger utvecklingen

---

5. Enligt maximumprincipen antas max på randen, d.v.s. på enhetscirkeln

$|z|=1$: $(a, b \neq 0)$

$$|az^n+b| \leq |a|\cdot|z|^n+|b| = |a|+|b|$$

på $|z|=1$

Kan det bli likhet?

Låt $a = re^{i\theta}$, $b = \rho e^{i\varphi}$

Ansätt $z = e^{i\alpha}$; $|az^n+b| =$

$$= |re^{i(\theta+n\alpha)} + \rho e^{i\varphi}|$$

Om vi väljer α s.a. $\theta + n\alpha = \varphi$, så kommer vi att kunna bryta ut $e^{i\varphi}$ (som har belopp 1).

Tag $z = e^{i\frac{\varphi-\theta}{n}}$

$$|a(e^{i\frac{\varphi-\theta}{n}})^n + b| = |r\cancel{e^{i\theta}}\cdot e^{i\varphi - \cancel{i\theta}} + \rho e^{i\varphi}| =$$

$$= |e^{i\varphi}|\cdot|r+\rho| = |r+\rho| = r+\rho,$$

ty $r, \rho > 0$.

$a=0$: uppenbart, $|b|=|b|$

$b=0$: —"—, $|az^n| = |a|\cdot 1$