MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf
Datum: 2008-10-24, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Jacob Sznajdman, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.

==

1. Ge exempel på funktioner som har **(a)** hävbar singularitet i $z_0 = -1$; **(b)** pol av ordning 3 i $z_0 = -1$; **(c)** väsentlig singularitet i $z_0 = -1$; **(d)** residy 2 i $z_0 = -1$; **(e)** icke-isolerad singularitet i $z_0 = -1$. (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+9)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2\text{p})$$

3. Bestäm antalet nollställen till funktionen $f(z) = z - 2 + e^{-z}$ i det högra halvplanet. Gör så mycket du kan för att lokalisera dessa. (max 7p)

4. Se nästa sida.

5. Låt D vara ett område i $\mathbb{C}$ och låt f vara en analytisk icke-konstant funktion i D sådan att $\operatorname{Re} f \geq 0$ i D. Visa att $\operatorname{Re} f > 0$ i D. (7p)

6. Funktionen f är analytisk i en punkterad omgivning till punkten z_0 och har väsentlig singularitet i z_0. Visa att det finns en följd $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, sådan att $z_n \to z_0$ och $f(z_n) \to \infty$ när $n \to \infty$. (5p)

7. Se nästa sida.

8. Se nästa sida.

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1,\ |z| > 1\}. \qquad (6p)$$

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p)

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 8. Funktionen f är analytisk och begränsad i en punkterad omgivning till z_0. Visa att f:s Laurentutveckling i samma punkterade omgivning till z_0 inte innehåller några negativa potenser av $z - z_0$. (Riemanns sats) (5p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06, 06/07) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1,\ |z| > 1\}. \qquad (6p)$$

TMA253 (3p, Kf, 05/06 & 06/07) 7. Formulera Cauchy-Goursats sats. Bevisa Cauchys sats (OBS! Cauchys integralsats, inte Cauchys integralformel). (5p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06 & 06/07) 8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 4. Lös begynnelsevärdesproblemet nedan med hjälp av Laplacetransform. (6p)

$$u'' + 2u' + u = \sin t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \qquad (u = u(t))$$

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 7. Formulera Cauchy-Goursats sats. Bevisa Cauchys sats (OBS! Cauchys integralsats, inte Cauchys integralformel). (5p)

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

/JM

MVE025 (TMA 252, 253)
Komplex matematisk analys F/Kf
Lösningar 24/10-2008

1. (a) $\dfrac{\sin(z+1)}{z+1}$;

(b) $\dfrac{1}{(z+1)^3}$; (c) $e^{\frac{1}{z+1}}$;

(d) $\dfrac{2}{z+1}$; (e) $\operatorname{Log}(z+1)$.

---

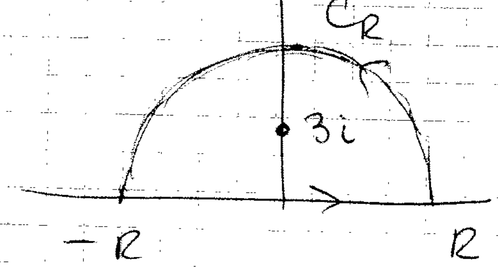
2. (a) $f(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{(z^2+9)^2}$, där $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{x\cos ax}{(x^2+9)^2}}_{\text{udda}} \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2} \, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2} \, dx$$

$\boxed{a \geq 0}$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$C_R : z = Re^{i\varphi}$

$0 \leq \varphi \leq \pi \quad (R > 3)$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad (2)$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{2\cdot 2i\varphi}\, e^{iaR\cos\varphi}\, e^{-aR\sin\varphi}}{(R^2e^{2i\varphi}+9)^2}\,d\varphi \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{1\cdot R^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{-aR\sin\varphi}}{(R^2-9)^2}\,d\varphi \leq \begin{bmatrix} a \geq 0 \\ R > 0 \\ \sin\varphi \geq 0 \end{bmatrix}$$

$$\leq \frac{R^2}{(R^2-9)^2}\cdot \pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f = 2\pi i \operatorname{Res}_{3i} f$$

f har dubbelpol i $3i$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{3i} f = \left(\frac{z e^{iaz}}{\cancel{(z-3i)^2}(z+3i)^2} \cdot \cancel{(z-3i)^2} \right)' \Bigg|_{z=3i} =$$

$$= \frac{(e^{iaz} + ziae^{iaz})(z+3i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+3i)}ze^{iaz}}{(z+3i)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{z=3i} =$$

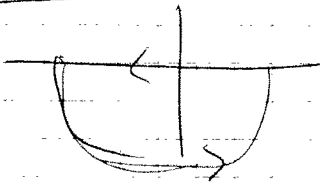
$$= \frac{e^{iaz}(\cancel{z} + 3i + z^2 ia - 3az - \cancel{2}z)}{(z+3i)^3} \Bigg|_{z=3i} =$$

$$= \frac{e^{-3a}(\cancel{3i} - 9ai - 9ai - \cancel{3i})}{6^3\cdot(-i)} = \frac{ae^{-3a}}{12}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{\cancel{i}}\cdot \cancel{2}\pi\cancel{i}\, \frac{ae^{-3a}}{\cancel{12}\,6} =$$

$$= \frac{\pi a e^{-3a}}{6} \quad \text{för } a \geq 0$$

$\boxed{a<0}$ antingen integrera längs



eller:

för $a<0$: $\sin ax = -\sin(-ax) = -\sin|a|x$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin|a|x}{(x^2+9)^2}\,dx =$$

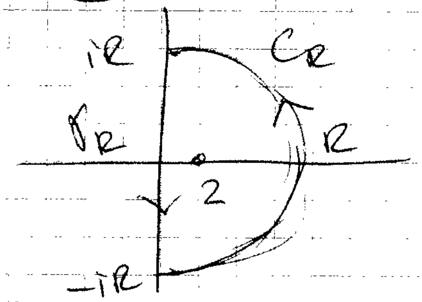
$$= -\frac{\pi |a| e^{-3|a|}}{6} = \frac{\pi a e^{-3|a|}}{6}$$

$$\Rightarrow \text{integralen} = \frac{\pi a e^{-3|a|}}{6} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(b) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix\xi}}{(x^2+9)^2}\,dx = [a = -\xi]$$

$$= -\frac{\pi i \xi e^{-3|\xi|}}{6}$$

(3.2) Rouchés sats på konturen



$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$

R stort; På Γ_R gäller:

$$|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$$

(ty $-x \leq 0$ på konturen Γ_R)

$|z-2| \geq 2$ på γ_R

$|z-2| \geq |z| - 2 \geq 2$ på C_R för $R \geq 4$

$\Rightarrow$ för $R \geq 4$ på Γ_R $\quad |z-2| \geq 2 > 1 \geq |e^{-z}|$

(4)

$\Rightarrow$ $z-2$ och $z-2+e^{-z}$ har like många nollställen innanför Γ_R, d.v.s. ett

Utanför Γ_R, i hhp?

$|z-2+e^{-z}| \geq |z-2| - e^{-x} \geq$ [$x \geq 0$]

$\geq |z| - 2 - e^{-x} > R - 2 - e^{-0} =$

$= R - 3 \geq 1$ för $R \geq 4$

$\Rightarrow$ inga nollställen utanför Γ_R

$\Rightarrow$ exakt ett nollställe i hhp

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 + \frac{1}{e} < 0 \\ f(2) = e^{-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nollstället reellt, } \in (1,2)$$

(5.) Betrakta $F(z) = e^{-f(z)}$; F analytisk i D och icke-konstant i D

(ty $F'(z) = -f'(z)e^{-f(z)} = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$)

$$|F(z)| = e^{-\mathrm{Re}\, f(z)} \leq 1 \quad \text{i } D$$

Antag att $\exists\, z_0 \in D$ s.a $\mathrm{Re}\, f(z_0) = 0$

$$\Rightarrow |F(z_0)| = e^{-0} = 1 = \max_D |F|$$

z_0 inre punkt (ty D öppen)

$\Rightarrow F \equiv \text{const}$ Motsägelse!

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, f > 0$ i D

⑥ väsentlig singularitet $\Rightarrow$ ej hävbar $\Rightarrow$ f ej begränsad i ngn punkterad omgivning till z_0

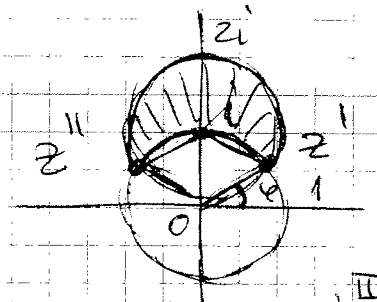
$$\Rightarrow \exists z_1 : |z_1 - z_0| < 1 \quad |f(z_1)| > 1$$
$$\exists z_2 : |z_2 - z_0| < 1/2 \quad |f(z_2)| > 2$$
$$\ldots$$
$$\exists z_n : |z_n - z_0| < 1/n \quad |f(z_n)| > n$$
$$\ldots$$

$\Rightarrow$ $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ och $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

(eventuellt $\delta, \delta/2, \ldots, \delta/n, \ldots,$ om f ej analytisk i den punkterade omgivningen med radie 1)

---

④



$0, z', i$ bilder en liksidig triangel

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z'' = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Möbiusavbildning som "räter ut" båda cirklarna: $z' \to 0$, $z'' \to \infty$

$$z_1 = \frac{z - z'}{z - z''} \quad ; \quad 0 \to \frac{z'}{z''} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$\Rightarrow$ den övre cirkeln avbildas på rät linje genom origo o genom pkten $e^{-i2\pi/3}$

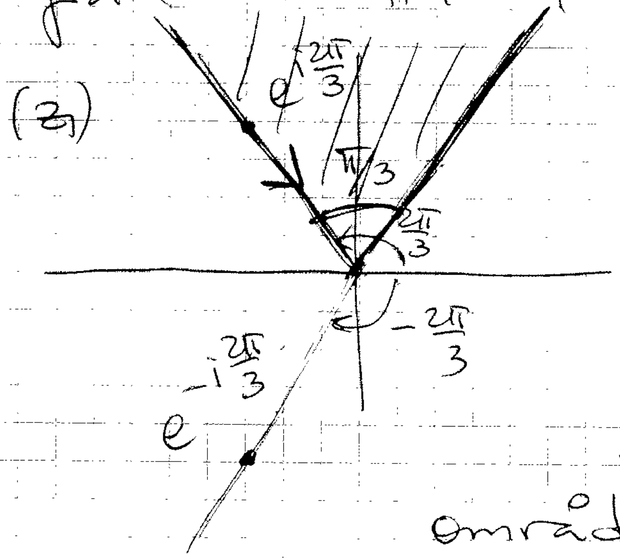
(6)

bågen som ingår i randen avbildas på den stråle från 0 till ∞ som ej innehåller $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Bågen från den andra cirkeln som ingår i randen:

$$i \curvearrowright \frac{i - z'}{i - z''} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} = \frac{z''}{z'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$\Rightarrow$ bågen avbildas på den stråle från 0 till ∞ som innehåller $e^{i\frac{2\pi}{3}}$



$\{z'', i, z'\}$

$\curvearrowright \{\infty, e^{i\frac{2\pi}{3}}, 0\}$

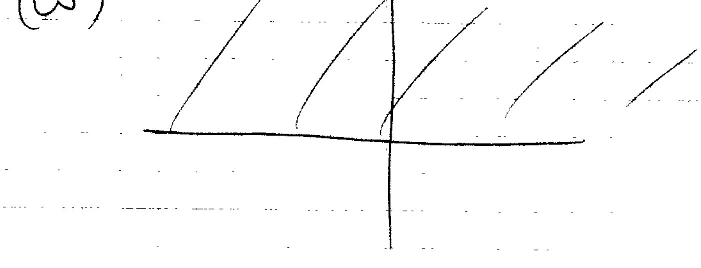
$\Rightarrow$ den markerade riktningen

området på vänster sida

$\Rightarrow$ det avbildas på den streckade vinkeln

Återstår: vridning $-\frac{\pi}{3}$ radianer samt potens 3

$$\Rightarrow w = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{z - z'}{z - z''}\right)^3$$



4.1 $\begin{cases} u'' + 2u' + u = \sin t \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$

$$\supset \quad s^2 U - s + 2sU - 2 + U = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+1)} =$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1}$$

(partialbråksuppdelning)

$$\subset \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$