MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf
Datum: 2009-01-12, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: , tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.

==

1. Lös begynnelsevärdesproblemet nedan med hjälp av Laplacetransform. (6p)

$$u'' - 2u' + 2u = e^t \sin t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \qquad (u = u(t))$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(x^2+4)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet nollställen till funktionen $f(z) = \alpha e^z - z^n$ innanför enhetscirkeln för $\alpha \geq 3$ och för $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$. (6p)

4. Se nästa sida.

5. Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx,$$

genom att välja lämplig gren $\log_*$ av den komplexa logaritmen och integrera funktionen

$$f(z) = \frac{z \log_* z}{z^3+1}$$

längs en lämplig kontur. (Metoden ger en möjlighet att beräkna integraler av typen $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ även när $\frac{P}{Q}$ inte är en jämn funktion.) (8p)

6. Funktionen f är analytisk i en punkterad omgivning till z_0 och uppfyller

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\frac{3}{2}} f(z) = 0.$$

Visa att f har antingen hävbar singularitet eller enkelpol i z_0. (5p)

7. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ 1 \leq r < 2\}. \qquad (6\text{p})$$

TMA253 (3p, Kf, 05/06, 06/07) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ 1 \leq r < 2\}. \qquad (6\text{p})$$

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 4. Ange Laurentutvecklingen kring $z_0 = -1$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z+3)(z+4)},$$

i det område som innehåller punkten $1 + i$. (6p)

/JM