MVE025 och MVE295 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex (matematisk) analys F / Kf och TM
Datum: 2009-10-23, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: David Witt Nyström, tel. 0762-721861, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

==

1. Lös begynnelsevärdesproblemet nedan med hjälp av Laplacetransform. (6p)

$$u'' + 2u' + 5u = 20, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 10 \qquad (u = u(t))$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}(0)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Givet är ekvationen $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2 = 0$.
(a) Bestäm antalet lösningar till ekvationen i det högra halvplanet. (3p)
(b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen i andra kvadranten. (1p)
(c) Visa att ekvationen har lösningar utanför den slutna enhetsskivan. (2p)

4. Avbilda konformt mängden $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}| < \frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ på det övre halvplanet. (6p) (För gamla varianter av kursen, se nästa sida.)

5. Funktionerna f och g är analytiska i det begränsade området D, kontinuerliga i $\overline{D}\,(= D \cup \partial D)$, och har samma nollställen i D, räknade med multiplicitet. Visa att om $|f(z)| = |g(z)| \neq 0$ för alla $z \in \partial D$, så finns ett komplext tal λ, $|\lambda| = 1$, och sådant att $f(z) = \lambda g(z)$ för alla $z \in \overline{D}$. (7p)

6. Antag att funktionen f har enkelpol i punkten z_0 och att funktionen g är analytisk i z_0. Visa att $\mathrm{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\,\mathrm{Res}_{z_0} f$. (5p)

7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p) (För gamla varianter av kursen, se nästa sida.)

8. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06, 06/07) 4. Avbilda konformt mängden $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}| < \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\}$ på det övre halvplanet. (6p)

TMA252 (4,5hp, F & Kf, fram till 04/05) 4. Ange Laurentutvecklingen kring $z_0 = i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2-i)},$$

i det område som innehåller punkten 1. (6p)

TMA253 (4,5hp, Kf, 05/06, 06/07) 7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (potensserieutveckling) kring punkten $z_0 = 0$ (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

TMA252 (4,5hp, F & Kf, fram till 04/05) 7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (potensserieutveckling) kring punkten $z_0 = 0$ (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

/JM

MVE025, MVE295 (TMA252/3)

Komplex (matematisk) analys F/Kf/TM

Lösningar 23/10-09

1. $u'' + 2u' + 5u = 5,\ u(0) = 0,\ u'(0) = 10$

$$\supset\ s^2U - s\cdot 0 - 10 + 2sU - 2\cdot 0 + 5U = \frac{20}{s}$$

$$U(s) = \left(\frac{20}{s} + 10\right) \Big/ \left(s^2 + 2s + 5\right) =$$

$$= \frac{10s + 20}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

$$10s + 20 = A(s^2 + 2s + 5) + s(Bs + C)$$

$s = 0$: $\quad 20 = 5A \ \Rightarrow\ A = 4$

s^2 : $\quad 0 = A + B \ \Rightarrow\ B = -4$

s : $\quad 10 = 2A + C \ \Rightarrow\ C = 2$

$$\Rightarrow\ U(s) = \frac{4}{s} - \frac{4s - 2}{(s+1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{4}{s} - 4\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \underbrace{6\frac{1}{(s+1)^2 + 4}}_{= 3\cdot\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}}$$

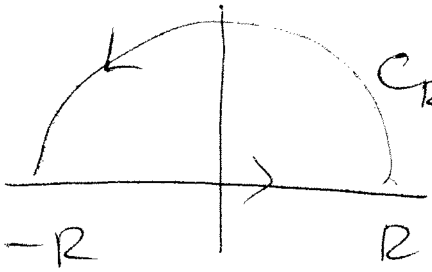
$$\subset\ u(t) = 4 - 4e^{-t}\cos 2t + 3e^{-t}\sin 2t$$

---

2. (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + z + 1)^2}$

f rationell funktion (2)

$\Rightarrow$ vi kan välja halvcirkel i öhp



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$C_R : z = Re^{i\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi$

nämnaren $= 0$: $\quad z^2 + z + 1 = 0$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in$ öhp ; innanför Γ_R för $R > 1$

z_1 dubbelpol för f

$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \left(\cancel{(z-z_1)^2} \frac{1}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2} \right)' \Bigg|_{z=z_1} =$$

$$= -2 \frac{1}{(z_1 - z_2)^3} = -2 \frac{1}{(i\sqrt{3})^3} = \frac{2}{i \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}\,d\theta}{(R^2e^{2i\theta} + Re^{i\theta} + 1)^2} \right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2 - R - 1)^2}\,d\theta = \frac{\pi R}{(R^2 - R - 1)^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

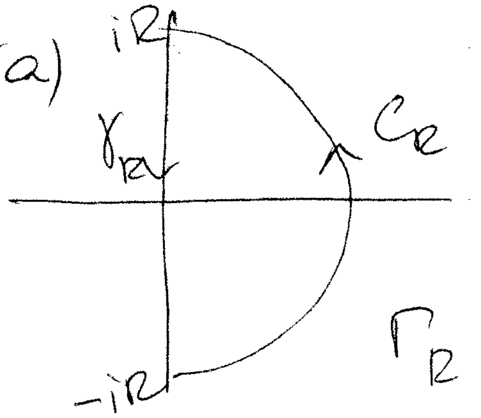
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

(b) $$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+x+1)^2}\,dx \Bigg|_{\xi=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

---

3. (a)



$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$

$\gamma_R = \{ iy : y \in \underleftarrow{[-R,R]} \}$

$C_R = \{ z = Re^{i\theta} : \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \}$

Vi vill räkna antalet varv $f(\Gamma_R)$ gör runt 0 för stora R, där
$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2$

γ_R : $f(iy) = y^4 + 2iy^3 - 3y^2 - iy + 2$

$u = \operatorname{Re} f$: $u(y) = y^4 - 3y^2 + 2 =$
$= (y^2-1)(y^2-2) =$
$= (y-1)(y+1)(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})$

$v = \operatorname{Im} f$: $v(y) = 2y^3 - y =$
$= 2y\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$R \to \infty \Rightarrow u, v \to \infty$, $u \gg v$

$R \to -\infty \Rightarrow u \to \infty, v \to -\infty$, $|u| \gg |v|$

$\Rightarrow f(iR) \in$ I kv., nära u-axeln
$f(-iR) \in$ IV kv., nära u-axeln

$\longleftarrow$

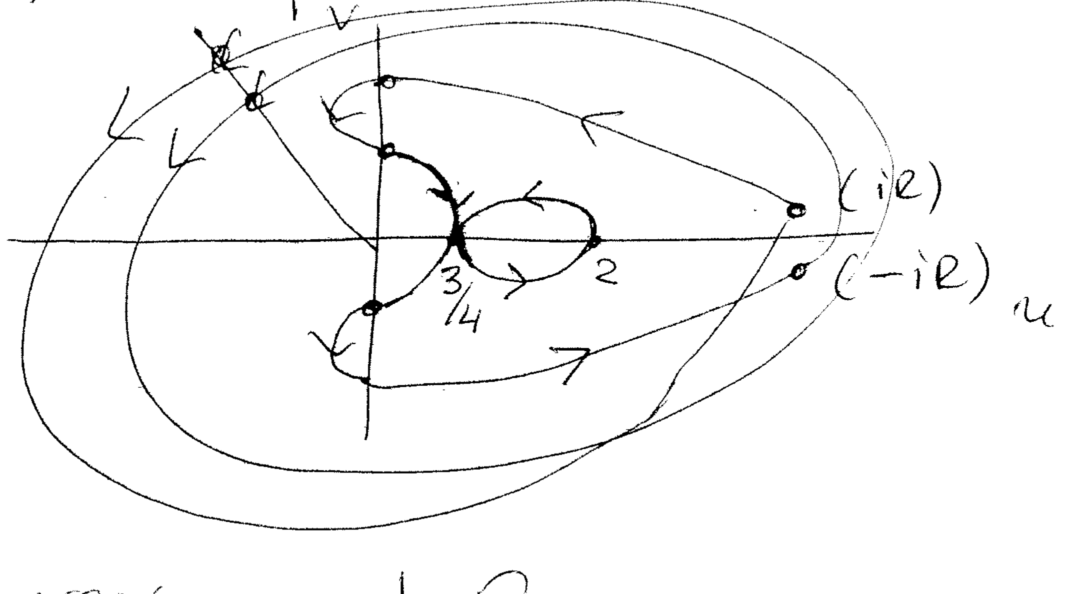
	$-R$		$-\sqrt{2}$		-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		R
u	$+$		0	$-$	0	$+$	$3/4$	$+$	2	$+$	$3/4$	$+$	0	$-$	0		$+$
v	$-$		$-3\sqrt{2}$	$-$	-1		0	$+$	0	$-$	0		1	$+$	$3\sqrt{2}$		$+$

$f(C_R)$: $\quad f(Re^{i\theta}) = R^4 e^{4i\theta}\left(1 + \frac{\cdots}{R}\right)$

$\frac{\cdots}{R} \to 0$ då $R \to \infty$

$\Rightarrow \Delta_{C_R} \arg f \approx 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$
$= 4\pi \quad$ för stora R

$\Rightarrow f(C_R)$ gör ≈ 2 varv runt 0

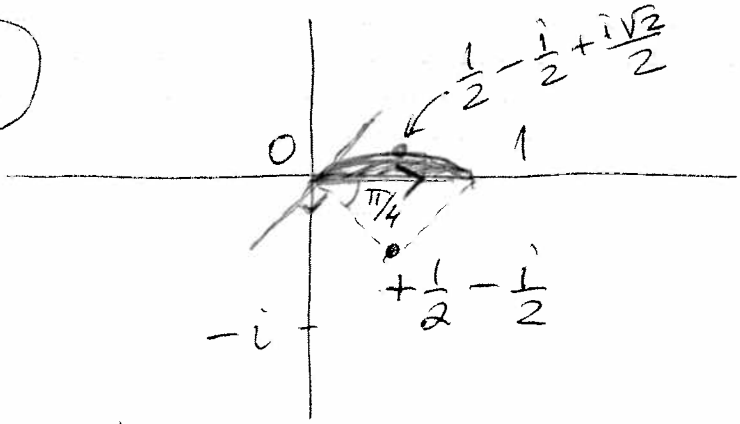


2 varv runt 0
$\Rightarrow f$ har 2 nollställen i hhp

(b) totalt 4, alltså 2 i vhp
inga negativa reella, koefficienterna reella $\Rightarrow$ ett i vardera kvadranten

(c) produkten av nollställena $= 2$
$\Rightarrow$ alla kan inte ha belopp ≤ 1

4.



5

Vi väljer Möbiusavbildning som avbildar 0 på 0 och 1 på ∞

$0 \to 0$

$1 \to \infty$ $\quad z_1 = \dfrac{z}{z-1}$

$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

cirkeln $\left|z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \to$ rät linje genom origo

vinkeln mellan cirkeln och Re-axeln är $\pi/4$

(se bilden och de markerade vinklarna)

(om man vill räkna istället:

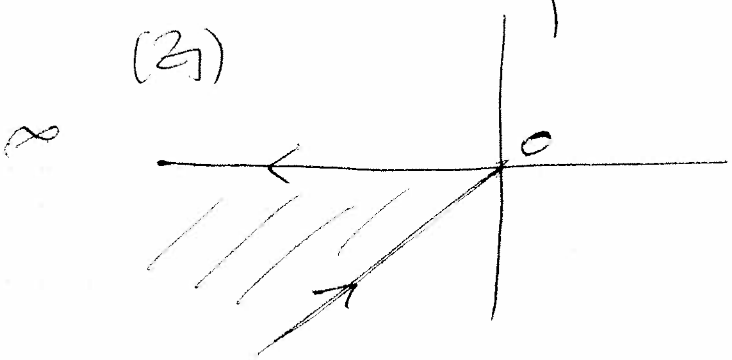
t.ex. $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} \to \ldots$)

Vi använder riktningsanalys för att avgöra var vinkeln ligger:

$\infty \to 1$

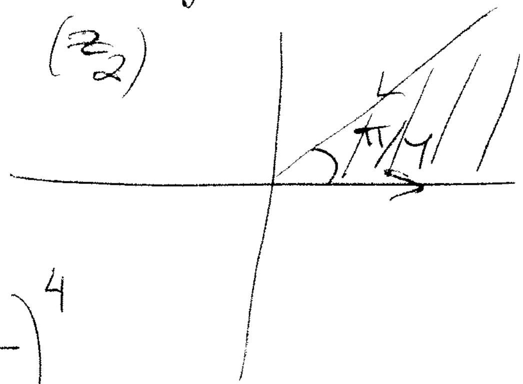
Den del av realaxeln som är med innehåller inte ∞ $\Rightarrow$ bilden av den är negativa realaxeln

(z_1)



området på vänster sida från 0 till 1 ger motsvarande från 0 till ∞

$\Rightarrow$ vi får vinkeln på bilden



$z_2 = -z_1$

$$w = z_2^4 = \left(\frac{z}{1-z}\right)^4$$

---

5. Funktionen $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ har hävbara singulariteter i alla f:s och g:s gemensamma nollställen och är därmed att betrakta som analytisk i D.

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{\underbrace{|g(z)|}_{\neq 0}} = 1 \quad \text{på } \partial D$$

$\Rightarrow |h(z)| < 1 \quad \forall z \in D$, eller också är $|h(z)| \equiv 1$ i D (*)

$1/h(z)$ är också analytisk i D ($\frac{1}{h} = \frac{g}{f}$, samma resonemang som ovan)

$$\left|\frac{1}{h(z)}\right| = 1 \quad \text{på } \partial D$$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{h(z)}\right| < 1 \quad \forall z \in D$ eller $\left|\frac{1}{h(z)}\right| \equiv 1$ i D. (**)

(*) och (**) $\Rightarrow |h(z)| \equiv 1$ i D

$\Rightarrow u^2 + v^2 \equiv 1 \quad (u = \text{Re}\, h,\ v = \text{Im}\, h)$

$$\Rightarrow \varphi_u \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi_v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varphi_u \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_v \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

LES, homogent, determinant $= 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \Rightarrow u \equiv \text{const}$$

(CR $\Rightarrow v \equiv \text{const}$)

$$\Rightarrow h(z) \equiv \text{const}$$

$$|h| \equiv 1 \Rightarrow h(z) = e^{i\theta} = \lambda, \ |\lambda| = 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \lambda g(z), \quad |\lambda| = 1$$

---

6. $$f(z)\,g(z) = \left(\frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \dots\right)(b_0 + \dots) =$$

$$= \frac{a_{-1} b_0}{z - z_0} + a_0 b_0 + \dots \Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(fg) = a_{-1} b_0$$

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f$$

$$b_0 = g(z_0)$$