MVE025 och MVE295 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex (matematisk) analys F / Kf och TM
Datum: 2010-08-18, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Jonatan Vasilis, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases} \qquad \text{för} \quad t > 0, \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$(x = x(t),\ y = y(t))$ (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna $\hat{f}(0)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \quad (2p)$$

3. Betrakta funktionen

$$f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

(a) Ange det maximala område i vilket f är analytisk. (4p)

(b) Beräkna $\tan f(z)$ i det området. Hur skulle du vilja beteckna f med tanke på resultatet? (4p)

4. Givet funktionen

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 7z + 10}$$

ange f:s serieutvecklingar kring 0 (både Taylor- och Laurentutvecklingar). (6p)

5. En komplexvärd funktion, definierad i $\mathbb{C}$, kallas *dubbelperiodisk* om det finns två komplexa tal T_1 och T_2, båda skilda från noll, som uppfyller $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$, och är sådana att

$$f(z + T_1) = f(z + T_2) = f(z), \qquad \text{för alla } z \in \mathbb{C}.$$

Visa att en hel funktion som är dubbelperiodisk måste vara konstant. (6p)

6. Punkten z_0 är isolerad singularitet för funktionen f. Visa att f har pol av ordning m i z_0 om och endast om $\dfrac{1}{f}$ har nollställe med multiplicitet m i z_0. (5p)

7. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

/JM

MVE025, MVE295

Komplex (matematisk) analys F/Kf/TM

Lösningar 18/8-10

1. Laplacetransformera ekvationerna:

$$\begin{cases} sX(s) - 0 = 2X(s) - Y(s) \\ sY(s) - 1 = 3X(s) - 2Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)X + Y = 0 \\ -3X + (s+2)Y = 1 \end{cases}$$ LES

Lösningar: $X(s) = -\dfrac{1}{s^2-1}$, $Y(s) = \dfrac{s-2}{s^2-1}$

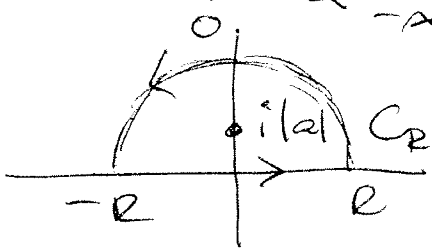
$$= \frac{s}{s^2-1} - 2 \cdot \frac{1}{s^2-1}$$

$$\Rightarrow X(s) \subset x(t) = -\sinh t$$
$$Y(s) \subset y(t) = \cosh t - 2\sinh t$$

---

2. (a) integranden jämn $\Rightarrow I = \int_0^\infty \dots = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \dots$

Låt $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$



$\Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$

$C_R: z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $C_R \subset$ öhp

$(z^2+a^2)^2 = 0 \;<\; \begin{matrix} z_1 = i|a| \in \text{öhp} \\ z_2 = -i|a| \notin \text{öhp} \end{matrix}$

Välj $R > |a|$

$\Rightarrow f$ har en pol innanför Γ_R, dubbelpol i $z_1 = i|a|$

(2)

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{i|a|} f =$$

$$= 2\pi i \left((z-|a|i)^2 \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} \right)' \Bigg|_{z=i|a|} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z^2}{(z+i|a|)^2} \right)' \Bigg|_{z=i|a|} =$$

$$= 2\pi i \, \frac{2z(z+i|a|)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i|a|)}\cdot z^2}{(z+i|a|)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{z=i|a|} =$$

$$= 2\pi \cancel{i} \, \frac{4(i|a|)^2 - 2(i|a|)^2}{-8\cancel{i}|a|^3} = 2\pi \cdot \frac{-2|\cancel{a}|^2}{-8|a|^{\cancel{3}}} =$$

$$= \frac{\pi}{2|a|}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 2I} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\,dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta}+a^2)^2} R i e^{i\theta}\,d\theta \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R\cdot R^2 \cdot 1\cdot 1\cdot 1}{(R^2\cdot 1-|a|^2)^2}\,d\theta = \frac{R^3}{(R^2-a^2)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2|a|} \xrightarrow[R\to\infty]{} 2I$$

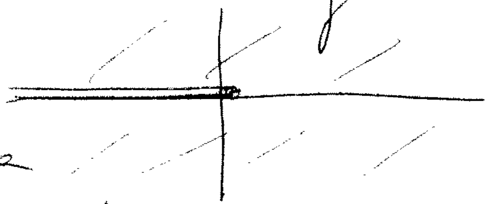
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4|a|}$$

(b) $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{e^{-i\cdot 0\cdot x}}_{=1} \, dx =$

$= 2I = \dfrac{\pi}{2|a|}$

---

3. Funktionen Log w är analytisk i



(det komplexa talplanet, uppskuret längs negativa realaxeln)

$$w = \frac{1+iz}{1-iz} \Leftrightarrow z = \frac{1}{i}\,\frac{w-1}{w+1} = -i\,\frac{w-1}{w+1}$$

w reellt $\Leftrightarrow$ z (rent) imaginärt

$$\{w : w<0,\ w\neq -1\} = \{w : w<-1\} \cup \{w : -1<w<0\}$$

$\underline{w<-1}: \Rightarrow \dfrac{w-1}{w+1} > 0$

$\Rightarrow z = iy$, där $y<0$

$$\frac{w-1}{w+1} = 1 - \frac{2}{w+1} \begin{cases} \xrightarrow[w\to\infty]{} 1 \\ \xrightarrow[w\to -1]{} \infty \\ >1 \text{ för } w<-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ snittet mellan ∞ och -1 längs Re i w-planet motsvarar ett snitt mellan $-i$ och ∞ längs Im i z-planet

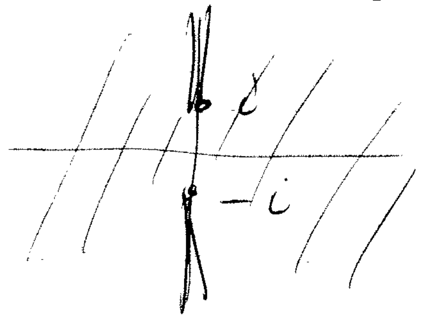
$\underline{0>w>-1}$: $\dfrac{w-1}{w+1} < 0 \Rightarrow z = iy$, där $y>0$

$$-\frac{w-1}{w+1} = 1-\frac{2w}{w+1} \begin{cases} \xrightarrow[w\to -1]{} \infty \\ \xrightarrow[w\to 0]{} +1 \\ >1 \quad \text{for } w\in(-1,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ snittet mellan -1 och 0 i w-planet längs Re-axeln motsvarar snittet längs Im i z-planet mellan i och ∞

-1 i w-planet motsvarar ∞ i z-planet

$\Rightarrow$ $\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz}$ analytisk i z-planet uppskuret längs Im-axeln mellan i och $-i$ via ∞



Detta område kan inte utvidgas, d.v.s. det är maximalt.

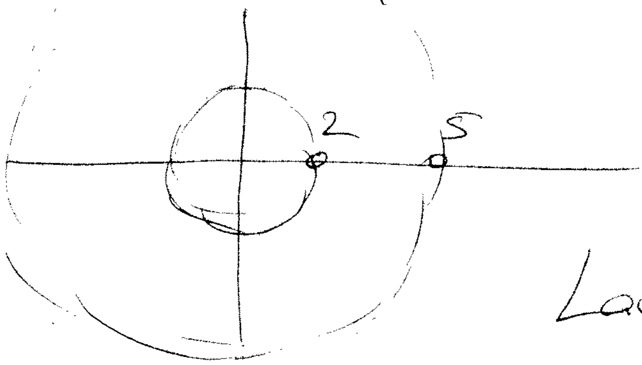
$$\tan f(z) = \frac{\sin f(z)}{\cos f(z)} = \frac{e^{if(z)}-e^{-if(z)}}{2i} \Big/ \frac{e^{if(z)}+e^{-if(z)}}{2}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{e^{2if(z)}-1}{e^{2if(z)}+1} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}}-1}{e^{\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}}+1} =$$

$$= \left[e^{\mathrm{Log}\,w} = w \right] = \frac{1}{i}\,\frac{\frac{1+iz}{1-iz}-1}{\frac{1+iz}{1-iz}+1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{2iz}{2} = z$$

$\Rightarrow \tan f(z) = z \Rightarrow$ det finns anledning att beteckna f som $\mathrm{Arctan}\, z$

(4.) f har singulariteter i två pkter: $z_1 = 2$ och $z_2 = 5$ (5)



$\Rightarrow$ f har Taylorutveckling i $\{|z|<2\}$ och Laurentutvecklingar i $\{2<|z|<5\}$

$\underline{|z|<2}$: $\dfrac{z+1}{z^2-7z+10} = \dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z-5}$

... $A = -1$, $B = 2$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots\right)$$

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{5}} = -\frac{1}{5}\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}+\dots\right)$$

konvergenta för $|z|<2$ resp. $|z|<5$.

$\underline{2<|z|<5}$: $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\dots\right)$ divergent!!!

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{5}\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{25}+\dots\right)$$

konvergent

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right)$$

$\underline{|z|>5}$: $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{2}{z}+\dfrac{4}{z^2}+\dots\right)$

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{5}{z}+\frac{25}{z^2}+\dots\right)$$

Återstår att multiplicera med $A=-1$, $B=2$, och lägga ihop i respektive område.

5. Villkoret $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$ innebär att ortsvektorerna till punkterna T_1 & T_2 inte är parallella. Bilda en parallellogram på dessa två vektorer; f upprepar sina värden från den parallellogrammen i varje parallellogram som fås ur den ursprungliga medelst translation med heltal $\cdot \overrightarrow{OT_1}$ + heltal $\cdot \overrightarrow{OT_2}$. Dessa translaterade parallellogrammer fyller ut hela planet

f hel $\Rightarrow$ kontinuerlig

$\Rightarrow f$ begränsad på den (slutna) första parallellogrammen

$\Rightarrow f$ begränsad i $\mathbb{C}$; f hel

$\Rightarrow f$ konstant enligt Liouvilles sats