MVE025 och MVE295
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex (matematisk) analys F / Kf och TM
Datum: 2011-08-17, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

==

1. Lös begynnelsevärdesproblemet nedan med hjälp av Laplacetransform. (6p)

$$u'' - 2u' + 5u = e^t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \qquad (u = u(t))$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}(0)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Givet är funktionen $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2}$.

(a) Bestäm antalet poler till f i det högra halvplanet. (4p)

(b) Bestäm ett positivt tal r sådant att funktionen f är analytisk utanför den slutna cirkelskivan med radie r. (2p)

4. Avbilda konformt mängden $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, \ \mathrm{Re}\, z > 0, \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ på det övre halvplanet. (6p)

5. Funktionen f är hel och sådan att den på realaxeln antar endast reella värden. Visa att f:s Taylorutveckling (=potensserieutveckling) kring vilket reellt tal som helst endast innehåller reella koefficienter. (7p)

6. Jag hade skrivit fel i uppgiften och upptäckte det för sent. Jag bortser från den vid rättningen och har max 45p på tentan, med betygsgränser: 18-26p betyg 3; 27-35p betyg 4; 36-45p betyg 5. Mycket ledsen! JM

7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

/JM

MVE025 & MVE295

Komplex (matematisk) analys F2/Kf2/TM2

Lösningar 17/8 -11

1. $u'' - 2u' + 5u = e^t$, $u(0)=0$, $u'(0)=1$

$\supset s^2U(s) - s\cdot 0 - 1 - 2sU(s) + 2\cdot 0 + 5U(s)$

$$= \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1 + 1/s-1}{s^2-2s+5} = \frac{s}{(s-1)((s-1)^2+2^2)}$$

$$\frac{s}{(s-1)(s^2-2s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+5}$$

$$s = A(s^2-2s+5) + (s-1)(Bs+C)$$

$s=1$: $1 = 4A$, $A = 1/4$

s^2 : $0 = A + B$, $B = -\frac{1}{4}$

s : $1 = -2A - B + C$, $C = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{-s+5}{s^2-2s+5} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{1}{\cancel{4}\,2}\frac{\cancel{4}\,2}{(s-1)^2+2^2}$$

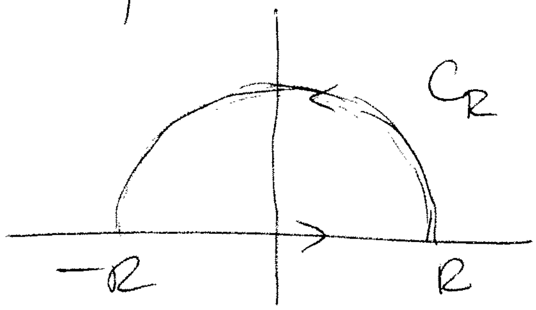
$$\subset \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^t\cos 2t + \frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

---

2. (a) $$f(z) = \frac{1}{(z^2-z+1)^2}$$

f rationell funktion $\Rightarrow$ vi kan välja kontur i öhp ②

$(R>1)$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$C_R: z = Re^{i\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi$

$z^2 - z + 1 = 0 \ : \ z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in$ öhp, innanför Γ_R $(R>1)$

z_1 dubbelpol för f

$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \left(\cancel{(z-z_1)^2} \frac{1}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2} \right)' \Bigg|_{z=z_1} =$$

$$= -2\frac{1}{(z_1-z_2)^3} = -2\frac{1}{(i\sqrt{3})^3} = \frac{2}{i3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}\,d\theta}{(R^2e^{2i\theta} - Re^{i\theta} + 1)^2} \right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-R-1)^2}\,d\theta = \frac{\pi R}{(R^2-R-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

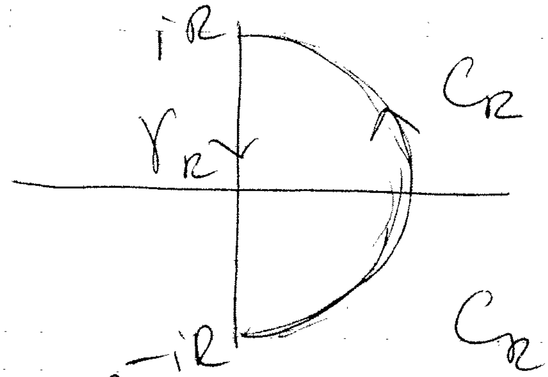
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

(b) $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2-x+1)^2}\,dx \Big|_{\xi=0} =$ ③

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

---

③ (a) Nämnaren har ej nollställe i 1
$\Rightarrow$ man kan ej förkorta
$\Rightarrow$ antalet poler i hhp är lika med antalet nollställen till nämnaren i hhp



$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$

$\gamma_R = \{iy : y \in [-R, R]\}$

$C_R = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$

Vi vill räkna antalet varv $f_1(\Gamma_R)$ gör runt origo i w-planet för stora R, där

$$f_1(z) \stackrel{!}{=} z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2.$$

γ_R : $f_1(iy) = y^4 + 2iy^3 - 3y^2 - iy + 2$

$u = \mathrm{Re}\, f_1$ $\quad u(y) = y^4 - 3y^2 + 2 =$
$= (y-1)(y+1)(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})$

$v = \mathrm{Im}\, f_1$ $\quad v(y) = 2y^3 - y$
$= 2y\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$R \to +\infty$: $u, v \to +\infty$, $u \gg v$

$R \to -\infty$: $u \to \infty, v \to -\infty$, $|u| \gg |v|$

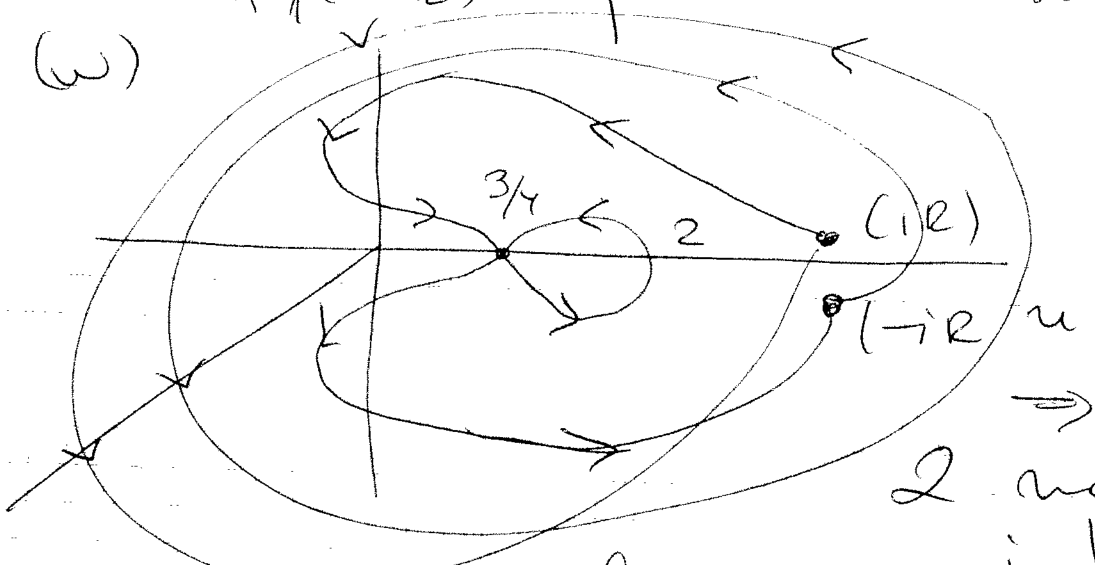
$\Rightarrow$ $f_1(iR) \in$ I kv., nära u-axeln $\boxed{4}$
$f_1(-iR) \in$ IV kv., — " —

	$-R$		$-\sqrt{2}$		-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$\sqrt{2}$		R
u	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$3/4$	$+$	2	$+$	$3/4$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
v	$-$		$-3\sqrt{2}$	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	1	$+$	$3\sqrt{2}$		$+$

f_1 på C_R: $f(Re^{i\theta}) = R^4 e^{4i\theta}\left(1 + \frac{\dots}{R}\right)$ $\to 0$ R→∞

$\Rightarrow \Delta_{C_R} \arg f_1 \approx 4\pi$ (för stora R)

$\Rightarrow f_1(C_R)$ gör ≈ 2 varv runt 0



två varv runt 0

$\Rightarrow$ f_1 har 2 nollställen i hhp

$\Rightarrow$ f har 2 poler i hhp

(b) $\underline{r}$ måste vara sådant att f_1 ej har nollställen utanför (f ej har poler) cirkeln runt 0 med radie $\underline{r}$.

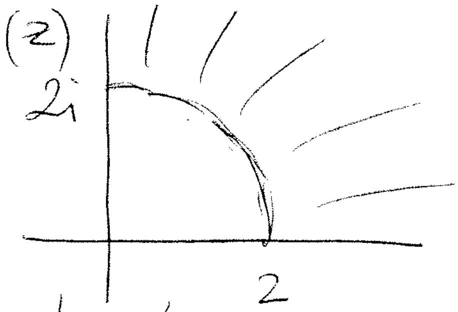
Tag $r = 10$, $F(z) = z^4$, $G(z) = f_1(z) - F(z)$

$|F(z)| = 10^4$ för $|z| = 10 = r$

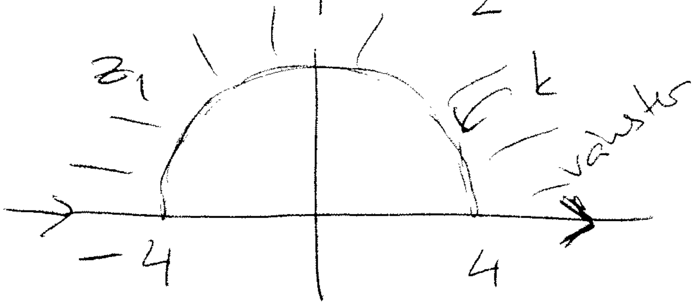
$|G(z)| \le 2|z|^3 + 3|z|^2 + |z| + 2 = 2312 < 10^4$

$\Rightarrow$ enl. Rouchés sats f analytisk i $\{|z| > 10\}$

4.



$$z_1 = z^2$$



$$z_2 = \frac{z_1 + 4}{z_1 - 4}$$

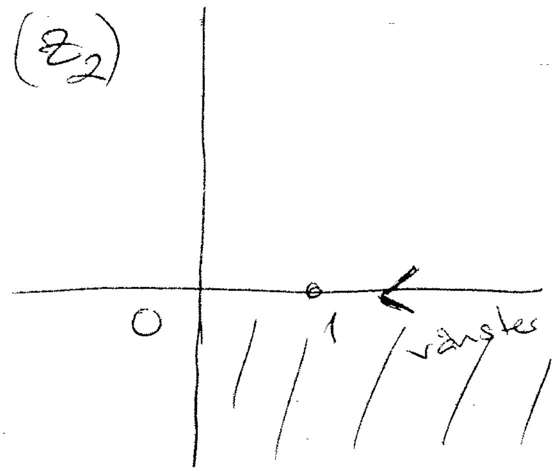
$-4 \mapsto 0$; $4 \mapsto \infty$

$Re \mapsto Re$; $\infty \mapsto 1$

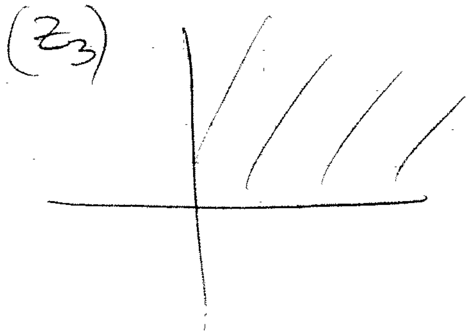
$k \perp$ Re-axeln i $z_1 = -4$

$\Rightarrow k \mapsto$ Im-axeln ($\perp$ Re-ax. i 0)

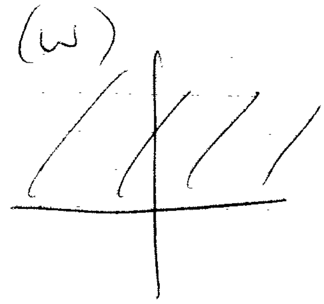
$\{4, \infty, -4\} \mapsto \{\infty, 1, 0\}$



$$z_3 = i z_2$$



$$w = z_3^2$$



---

5. Låt $a \in \mathbb{R}$

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n +$$

$+ \dots$; Vi ska visa att

$f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f = u + iv \quad (u = \mathrm{Re}\, f,\ v = \mathrm{Im}\, f)$ 6

Givet : $v(x, 0) \equiv 0$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, 0) - v(x,0)}{\Delta x} = 0$$

$\Rightarrow f'(z) \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(d.v.s. f' reell på Re-axeln)

Induktivt fås att

$f^{(n)}$ reell på realaxeln

$\Rightarrow$ alla koefficienter $f^{(n)}(a)/n!$ reella $(a \in \mathbb{R})$

---

6. Jag har skrivit fel i uppgiften, bortser från den vid rättningen. Mycket ledsen!

(max på skrivningen: 45 p,

gräns för "godkänd" : 18 p

18 - 26 p : betyg 3

27 - 35 p : betyg 4

36 - 45 p : betyg 5