

# 1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2013 01 17, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna  
Telefonvakt: Dawan Mustafa 0703-088304

---

1. a. Beräkna Fouriertransformen av

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

med hjälp av residykalkyl. (5p)

- b. Använd resultatet till att beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

(2p)

2. Låt  $p(z) = z^4 + z^3 + 1$ . Visa med hjälp av Rouchés sats att alla  $p$ :s nollställen uppfyller  $3/4 < |z| < 3/2$ . (7p)

3. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz.$$

(7p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$u'' + 2u' + u = \sin t \quad t > 0,$$

$u(0) = 1$  och  $u'(0) = 0$ , explicit med hjälp av Laplacetransformen. (Explicit betyder att du inte skall svara med en faltning.) (7p)

5. Avbilda konformt området  $\{z; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  på övre halvplanet.

(7p)

6. Bevisa Cauchy's integralformel. (Du får använda Cauchys integralsats utan bevis.) (5p)

7. Antag att  $f$  är holomorf i  $\{z; 0 < |z| < 1\}$  och att  $|f| \leq 1$  där. Visa att  $f$  kan fortsättas till en holomorf funktion i  $\{z; |z| < 1\}$ . (5p)

8. Antag att  $f = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  är holomorf i cirkelskivan  $\{z; |z| < R\}$  där  $R > 1$ , och att  $|f| \leq 1$ . Visa att  $|a_n| \leq 1$  för alla  $n = 0, 1, 2, \dots$  (5p)

Lycka till!,  
BB

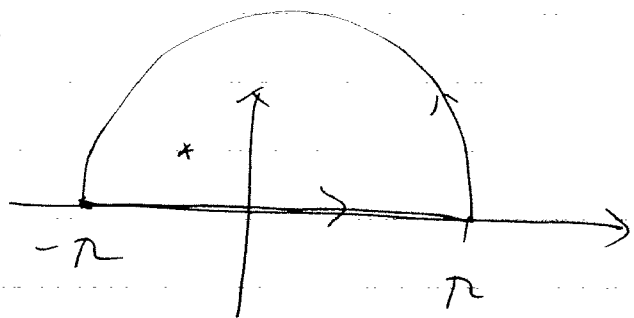
Januari

2013

1.

$$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixa}}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Låt  $\Gamma_R =$



Låt  $f(z) = \frac{e^{-iz \cdot a}}{z^2 + 2z + 2}$

$f$  har en singular punkt  
innan för  $\Gamma_R$  om  $R \gg 1$ ,  
nämligen  $z = -1 + i$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) = \\ &= 2\pi i \frac{e^{-i(-1+i)a}}{z(i-1)+2} = \end{aligned}$$

$$= \pi e^a e^{ia}$$

$$\int_{\Gamma_R} f dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{|z|=R} f(z) dz = \frac{1+i\pi}{2} e^{\frac{1+i\pi}{2} a}$$

$|z|=R$   
 $y > 0$

$$\left| \frac{\Pi}{R} \right| \leq \pi R \max_{|z|=R} |f| \leq$$

$$\leq \pi R \frac{e^{\gamma a}}{R^2 - 2R - 2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

om  $a < 0$

$$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi e^{a+ia}$$

om  $a < 0$ . Om  $a > 0$   $\hat{u}$

$$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixa}}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$= \hat{u}(-a) = \pi e^{-a-ia} = \pi e^{-a+ia}$$

(eftersom  $-a < 0$  om  $a > 0$ ).

$$\therefore \hat{u}(a) = \begin{cases} \pi e^{-a+ia} & a > 0 \\ \pi e^{a+ia} & a < 0 \end{cases} = \pi e^{-|a|+ia}$$

(Vilket kan kollar mot transl. formeln)

$$\underline{1 b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 2x + 2} dx = \operatorname{Re} \hat{u}(a) =$$

$$= \pi e^{-|a|} \cos a$$

3

2.  $p(z) = z^4 + z^3 + 1$ .

(i) Låt  $f(z) = z^4$       $h(z) = z^3 + 1$

På  $\{|z| = 3/2\}$  är  $|f| = \frac{81}{16}$ ;

$$|h| \leq \frac{27}{8} + 1 = \frac{35}{8} = \frac{70}{16} < |f|.$$

Rouché  $\Rightarrow p = f + h$  har lika  
mängd nollställen i  $|z| < 3/2$

som  $f$ , dvs 4 stycken.

(ii) Låt  $f(z) = 1$       $h(z) = z^4 + z^3$

På  $\{|z| = 3/4\}$  är  $|f| = 1$ ;

$$|h| \leq \frac{81}{256} + \frac{27}{64} = \frac{189}{256} < 1,$$

eftersom Rouché  $\Rightarrow p = f + h$  har lika  
mängd nollställen i  $|z| < 3/4$  som  
 $f$ , dvs inget.

$p(z)$  har alltså 4 nollställen<sup>4</sup>  
i  $\left\{ \frac{3}{4} < |z| < \frac{3}{2} \right\}$  och kan  
inte ha något mer nollställe  
eftersom graden = 4.

□

$$(3) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + z^9 g_1$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots \quad e^{-z} = 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \dots$$

$$\sinh z = (e^z - e^{-z})/2 =$$

$$= \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + z^9 g_2(z)$$

$$\therefore \sin z - \sinh z =$$

$$= - \left[ \frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + z^9 g(z) \right]$$

$$\therefore \operatorname{Res} \left[ \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}, 0 \right] = \text{koeff. för } \frac{1}{z} =$$

$$= - \frac{1}{7!} \quad (\text{Marcks Residysatsen} \Rightarrow)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz = - \frac{2\pi i}{7!}$$

□

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

5.

$$4. (*) \quad u'' + 2u' + u = \sin t \quad t > 0.$$

$$\tilde{u}' = s\tilde{u} - u(0) = s\tilde{u} - 1$$

$$\tilde{u}'' = s^2\tilde{u} - u'(0) - s u(0) = s^2\tilde{u} - s$$

$$\tilde{\sin t} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\therefore (s^2 + 2s + 1)\tilde{u} - s - 2 = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\tilde{u} = \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2}$$

Partialbräksuppdelning

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

$$\text{Handpåläggning} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

$$\text{Därefter bestäms } C = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \tilde{u} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1}$$

$N_v \bar{m}$

6.

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t})$$

$$\frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}(te^{-t})$$

$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}(\cos t)$$

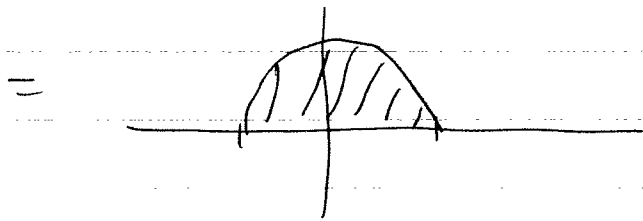
$$\therefore u(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

③

5.  $D = \{z; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  7.

~~W~~  $f(z) = z^2$  avbildar  $D$  konform

på  $D_1 = \{z; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} =$



$D_1$  begränsas av enhetscirkeln och Re-axeln.

$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$  avbildar både

enhetscirkeln och Re-axeln på linjer genom origo. Dessa

skär varandra i rätvinkel.

Dessutom är  $T(z)$  reell om

$z$  är reell, så Re-axeln måste avbildas på sig själv. Därför måste bilden av enhetscirkeln (en linje genom origo  $\perp$  mot Re-axeln) vara Im-axeln.



$$\text{Slutligen } \bar{m} \cdot T(i) = \frac{i+1}{i-1} = -i, \quad 8.$$

så övre halvplanet avbildas på nedre halvplanet, och

$T(0) = -1$ , så enhetscirkeln avbildas på vänstra halvplanet.

$D_1$  = snittet av övre halvplanet med enhetscirkeln avbildas därför av  $T$  på snittet av nedre & vänstra halvplanet, dvs 3:die kvadranten.

$g = z^2$  avbildar 3:die kvadranten på ÖHP.

$$\therefore h = g \circ T \circ f = \left( \frac{1+z^2}{-1+z^2} \right)^2$$

avbildar  $D$  på ÖHP

Pa.

8

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

enligt residysatsen.

$$\therefore |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \max_{|z|=1} \left| \frac{f}{z^{n+1}} \right| \leq 1$$



9.