1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2013 10 24, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Anna Persson 0703-088304

---

1. a) Beräkna med användning av residykalkyl Fouriertransformen av

$$\frac{1}{x^2+4x+8}$$

   (4p)

   b) Beräkna Fouriertransformen av

$$\frac{\cos x}{x^2+4x+8}$$

   (3p)

2. Beräkna integralen

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

   (7p)

3. a) Hur många nollställen har funktionen $f(z) = z^5 - 5z + 3$ i cirkelringen $\{z; 1/2 < |z| < 1\}$. (4p)

   b) Hur många nollställen har samma funktion i högra halvplanet? (3p)

4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{|z| < \sqrt{2}\} \cap \{|z-2| < \sqrt{2}\}.$$

   (7p)

5. Lös med hjälp av Laplacetransformering systemet

$$x'(t) = 2x(t) - y(t)$$

$$y'(t) = 3x(t) - 2y(t)$$

   för $t > 0$ med begynnelsevärdena $x(0) = 0, y(0) = 1$. (7p)

6. Bevisa faltningssatsen för Z-transformen.. (5p)

7. Formulera och bevisa argumentprincipen på integralform (dvs den formel som uttrycker antalet nollställen av en holomorf funktion innanför en kurva som en integral över kurvan.) (5p)

8. Låt u vara en harmonisk funktion definierad i hela det komplexa planet. Visa att det finns en holomorf funktion vars realdel är $xu_x + yu_y$ (2p). Visa också att det finns en holomorf funktion vars realdel är

$$\frac{xu_x - yu_y}{x^2+y^2}$$

   utanför origo.

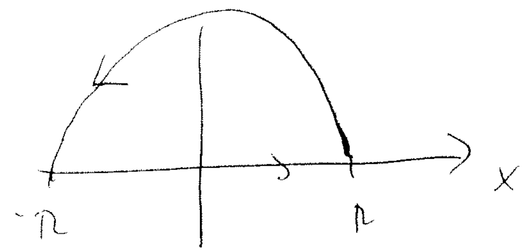
   (3p)

Lycka till!,
BB

1. $u(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+8}$

$$\hat{u}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixa}}{x^2+4x+8}\,dx \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(i) ~~antag~~ $a \leq 0$. Låt Γ_R vara kurvan i figuren; C_R den del av Γ_R som ligger på cirkeln $|z| = R$.



Vi beräknar först

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \quad \text{där} \quad f(z) = \frac{e^{-iza}}{z^2+4z+8}$$

f:s poler är ~~[illegible]~~ nollställen till nämnaren: $z^2+4z+8=0$, $z_0, z_1 = -2 \pm 2i$,

Bara $z_0 = -2+2i$ ligger innanför Γ_R

Residysatsen $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0) =$

$$= 2\pi i \frac{e^{-iz_0 a}}{2z_0+4} = \frac{2\pi i\, e^{2ia} e^{2a}}{4i} = \pi \frac{e^{2ia}e^{2a}}{2}.$$

Nu är $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \hat{u}(a)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0 \quad \text{ty}$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \pi R \max_{C_R} |f| \le$$

$$\le \frac{\pi R \max e^{ya}}{R^2 - 4R - 8} \to 0 \qquad \text{om } y \geq 0 \ \& \ a \le 0.$$

$\therefore \quad \hat{u}(a) = \dfrac{\pi}{2} e^{2ia+2a}$ $\qquad \underline{\text{om} \quad a \le 0},$

(ii) $a \le 0$

$$\overline{\hat{u}(a)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+4x+8}\,dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(-a)x}}{x^2+4x+8}\,dx}$$

$$= \overline{\frac{\pi}{2} e^{-2ia + 2a}} = \frac{\pi}{2} e^{2ia-2a} \quad \text{enl (i)}$$

(iii) Sammanfattningsvis

$$\hat{u}(a) = \frac{\pi}{2} e^{2ia} e^{-2|a|} \quad \text{om} \quad a \in \mathbb{R}.$$

(Vanligt fel: $\hat{u} = \frac{\pi}{2} e^{2i|a| - 2|a|}$ ✓)

b) $v(x) = u(x)\cos x = u(x)(e^{ix} + e^{-ix})/2$

$$\hat{v}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-iax} = \frac{1}{2}\left[\hat{u}(a-1) + \hat{u}(a+1)\right]$$

där $\hat{u}(a)$ ges av a)

(vanligt fel: $\hat{v}(a) = \mathrm{Re}\,(\widehat{u e^{ix}})$ ✓).

2.

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t} = I.$$

$$\sin t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)$$

$$\sin^2 t = \frac{e^{2it} + e^{-2it} - 2}{-4} = \frac{2 - e^{2it} - e^{-2it}}{4}$$

Sätt $z = e^{2it}$, $0 < t < \pi$. Det är en parametr. av $|z| = 1$

$$dz = 2iz\,dt$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left[\frac{2 - z - \frac{1}{z}}{4} + 1\right]} =$$

$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left[6 - z - \frac{1}{z}\right]} = -\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 6z + 1}$$

Låt $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 1}$. Poler $z = 3 \pm \sqrt{8}$

Bara $z_0 = 3 - \sqrt{8}$ ligger i Enhetscirkeln.

$$\therefore \int f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = 2\pi i \frac{1}{2z_0 - 6}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-2\sqrt{8}}.$$

$$\therefore \quad I = -\frac{2}{i}\, 2\pi i \frac{1}{(-2\sqrt{8})} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. $f(z) = z^5 - 5z + 3$ i

$\{z \,;\, \frac{1}{2} < |z| < 1\}$.

(i) Låt $h(z) = z^5 + 3$; $g(z) = -5z$.

på $|z| = 1$ gäller $|h(z)| \leq 1 + 3 < 5 = |g(z)|$

Rouché $\Rightarrow$ g & $g + h = f$ har lika många nollställen i $\{|z| < 1\}$.

g har ett nollställe där.

$\therefore$ f har 1 nollställe i $\{|z| < 1\}$

(ii) Låt $g = 3$, $h(z) = z^5 - 5z$.

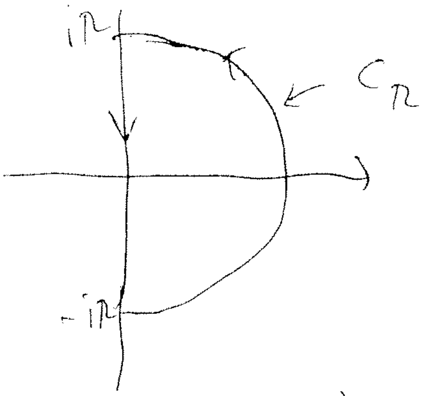
på $|z| = \frac{1}{2}$ gäller $|h| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{5}{2} < 3 = |g|$

$\therefore$ g & $g + h = f$ har lika många nollst. i $\{|z| < 1/2\}$. g har inget nollställe i $\{|z| < \frac{1}{2}\}$. $\therefore$ f har inget nollst. i $\{|z| < \frac{1}{2}\}$.

(iii) Antalet nollställen i ringen $\{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ är $1 - 0 = 1$.

(Vanligt fel: Man uppskattar $|h(1)|$ el $|h(\frac{1}{2})|$ i.st.f. $|h(z)|$ då $|z| = 1$ el $|z| = 1/2$. ✓).

3b) Låt Γ_R vara kurvan i fig:



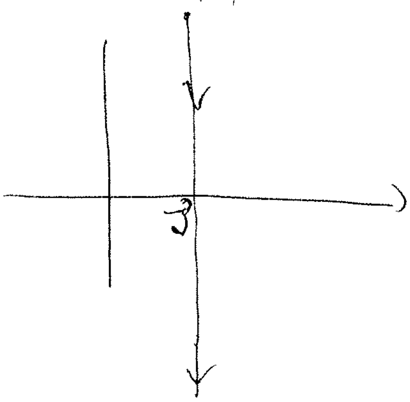
$\operatorname{argvar}(f, C_R) \approx \operatorname{argvar}(z^5, C_R) = 5\pi$

om $R >> 0$,

$\operatorname{argvar}(f, [iR, -iR]) \approx -\pi$ eftersom

$f(iy) = i(y^5 - 5y) + 3$ så $f(iy)$ följer

kurvan



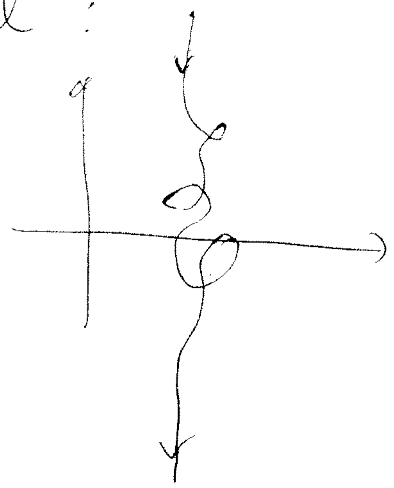
$\therefore \operatorname{argvar}(f, \Gamma_R) \simeq 5\pi - \pi = 4\pi$

$\therefore \operatorname{argvar}(f, \Gamma_R) = 4\pi$ ty argvar är en heltalsmultipel av 2π

$\therefore N = \dfrac{4\pi}{2\pi} = 2$ enligt argumentprinc.

(Vanligt fel:

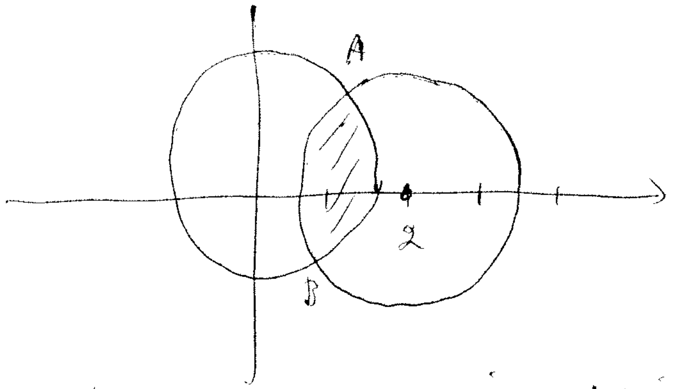
$f(iy) \neq$



Teckenstudium etc. av $f(iy)$ är onödigt eftersom $\operatorname{Re} f(iy) = 3 = \text{konst.}$)

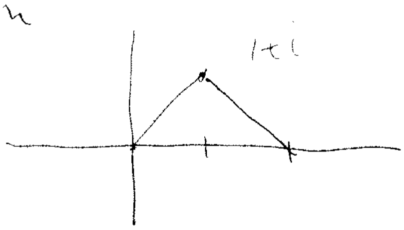
4. Avbilda

$$D = \{ |z| < \sqrt{2} \} \cap \{ |z-2| < \sqrt{2} \}$$



Cirklarna skärs i $1 \pm i$, $A = 1+i$, $B = 1-i$

Triangeln



är rätvinkligt enl. omv. av Pythagoras sats.

Cirklarna skär därför varandra under rät vinkel.

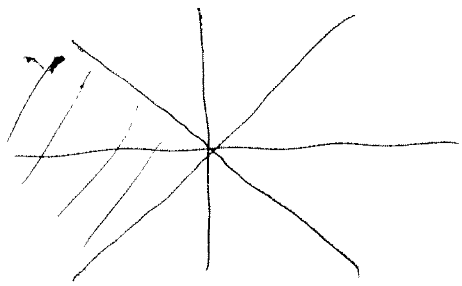
Låt $M(z) = \dfrac{z-B}{z-A} = \dfrac{z-1+i}{z-1-i}$

M avbildar båda cirklarna på räta linjen genom origo eftersom $M(B)=0$ & $M(A)=\infty$.

Dessutom avbildar M linjen $\operatorname{Re} z = 1$ på en linje genom origo (eftersom A & B ligger på linjen) & $M(1) = -1$.

$\therefore$ Linjen $\operatorname{Re} z = 1$ avbildas på Re-axeln

Eftersom $\{\operatorname{Re} z = 1\}$ skär båda cirlarna under vinkeln $\pi/4$ (den delar vinkeln mellan cirklarna mitt itu), måste cirklarna avbildas på linjerna $y = \pm x$.



och bilden av D är det skuggade området eftersom den innehåller $M(1) = -1$.

Låt sedan

$F(z) = M(z)^2$, F avbildar D på

högra halvplanet eftersom

$F(z) = (-M)^2$ & $-\frac{\pi}{4} < \arg -M < \frac{\pi}{4}$

Så $-\frac{\pi}{2} < \arg(-M)^2 < \frac{\pi}{2}$.

$G(z) = \cancel{\ldots}\ i\,F(z) = i\,M(z)$ är då

en avbildning på övre halvplanet.

(Vanligt fel: Man bestämmer M så

att $M(1+\sqrt{2}) = 0$ el ngt dyl.).

5.

$$\dot{x} = 2x - y \qquad x(0) = 0$$
$$\dot{y} = 3x - 2y \qquad y(0) = 1.$$

Laplacetransformering ger

$$s\tilde{x} = 2\tilde{x} - \tilde{y} \quad \& \quad s\tilde{y} - 1 = 3\hat{x} - 2\tilde{y}$$

$$\therefore \quad \hat{y} = (2-s)\tilde{x} \quad \& \quad (s-2)\hat{y} = 3\hat{x} + 1$$

$$\therefore \quad (4-s^2)\hat{x} = 3\hat{x} + 1, \quad \hat{x} = \frac{1}{1-s^2}$$

$$\therefore \quad x = -\sinh t \qquad \text{(enl. tabell)}$$

$$\hat{y} = (2-s)\hat{x} = \frac{2-s}{1-s^2}$$

$$\therefore \quad y = \cosh t - 2 \sinh t.$$

8. Finn f holomorf sådan att $\operatorname{Re} f = x u_x + y u_y$ om u är harmonisk.

Man observerar att

$$x u_x + y u_y = \operatorname{Re} (x+iy)(u_x - i u_y)$$

Låt $g(z) = u_x - i u_y$. Då är

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) g = u_{xx} + i u_{xy} - i u_{xy} + u_{yy}$$

$$= u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

g löser alltså Cauchy-Riemanns ekvationer, så g är holomorf. Därför är

$f(z) = z g$ holo & $\operatorname{Re} f = x u_x + y u_y$.

På samma sätt är

$$x u_x - y u_y = \operatorname{Re} \bar{z} g, \quad \text{så}$$

$$\frac{x u_x - y u_y}{x^2+y^2} = \operatorname{Re} \frac{g}{z},$$

som också är holomorf för $z \neq 0$.