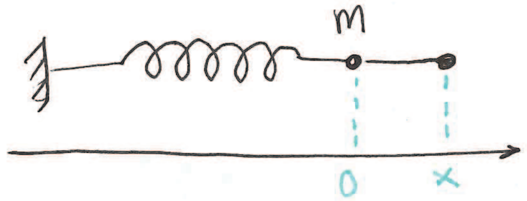
Tis LV 3

Harmoriisk Rörelse

SHM = simple harmonic motion

Ex. Massa-fjäder systemet



$F = -kx$ Hooke's lag

↳ fjäder konstanten

Newtons 2:a lag: $F = ma = m\frac{dV}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$$ { x är tidsberoende }

k = fjäderkonstanten $[N/m]$

↳ "hur styv fjädern är"

m = massan

Generellt uttryck $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

x = position, utslag från jämvikt "displacement"

ω^2 = återförande kraften$/(x \cdot m)$

ω = vinkelfrekvens $\left[\frac{rad}{s}\right] = 2\pi f$

$= \frac{2\pi}{T}$ periodtiden

Ibland används ν för frekvensen, istället för f

Lösning: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\{\varphi$: startläge$\}$ (1)

$= A\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ (2)

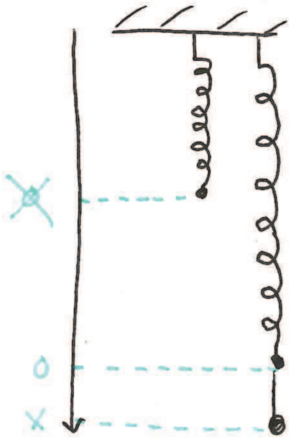
$= A(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi)$

$= \underbrace{A\cos\varphi}_{a}\cos\omega t - \underbrace{A\sin\varphi}_{-b}\sin\omega t$

$= a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (3)

((1) ≡ (2) ≡ (3))

Ex. Vertikalt massfjädersystem är ekvivalent bortsett att man får en förskjutning av jämviktsläget $\Longrightarrow$ samma lösningsform



Harmonisk rörelse $(\varphi = 0)$:

positionen: $x(t) = A\cos wt$

hastigheten: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\sin wt \cdot w = Aw\cos(wt - \frac{\pi}{2})$

accelerationen: $a(t) = -Aw^2\cos wt = -w^2 \cdot x(t) = -w^2 A\cos(wt - \frac{\pi}{\text{[illegible]}})$

Egen frekvens ("natural frequency of oscillation")

= f för ett svängande system fritt från yttre påverkan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \longrightarrow \omega = 2\pi f$$

Egen frekvens för massa fjäder system

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \begin{cases} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \\ T = 2\pi\sqrt{m/k} \end{cases}$$

Energibetraktelse (förenklar ofta beräkningar)

(Härledning av energiprincipen)

- Newton + Hooke: $ma = -kx \Longrightarrow \underbrace{m\frac{dv}{dt} = -kx}$
- $v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow v\,dt = dx$ multiplicera

$$\Longrightarrow mv\,dv = -kx\,dx$$

deriveringsregel: ~~m~~ $d\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\,dv$

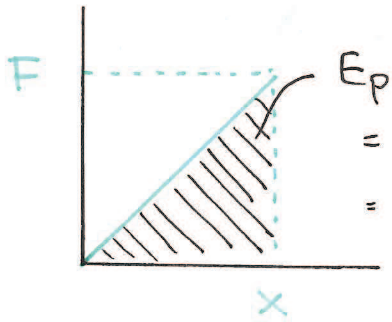
$$\Longrightarrow m\,d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -k\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = -d\left(k\frac{x^2}{2}\right)$$

- Integrera: $\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = C$ (konstant)

$$\underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{E_k} + \underbrace{\frac{kx^2}{2}}_{E_p} = \underbrace{\text{konstant}}_{E_{tot}}$$

kinetisk energi — potentiell energi — total energi



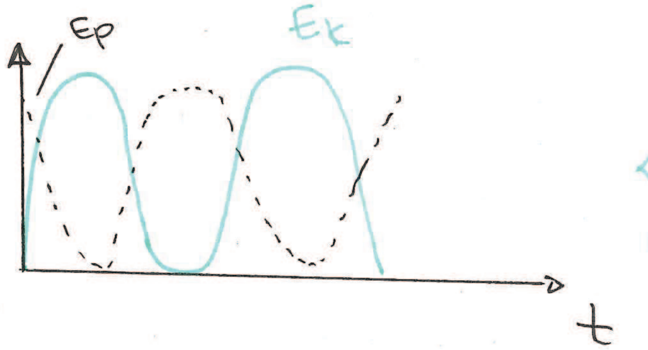
E_p: utfört arbete

$= \frac{1}{2} Fx =$

$= \frac{1}{2}(kx)x = \frac{kx^2}{2}$

$$E_{tot} = \underbrace{E_k}_{\text{k i king}} + \underbrace{E_p}_{v} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{m}{2} \underbrace{\omega^2}_{\frac{k}{m}} A^2 \sin^2(\omega t) + \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t)$$



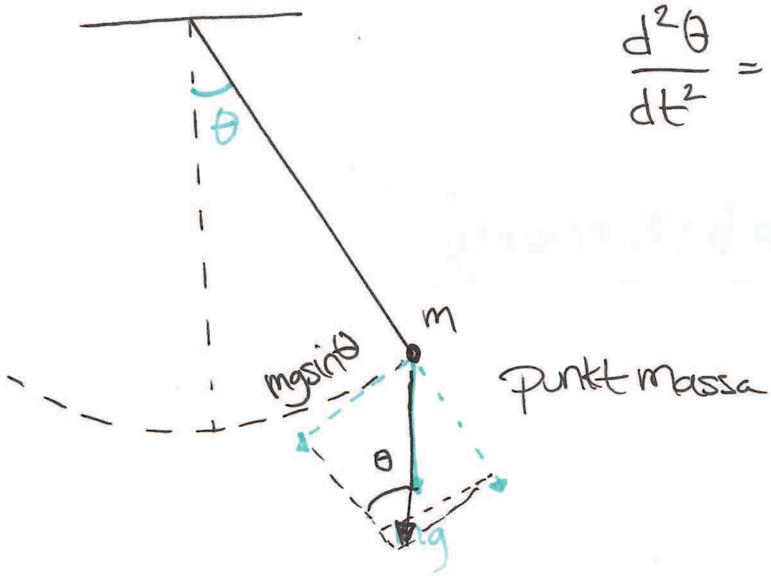
Systemet pendlar mellan rörelse- och potentiell energi

- Notera 1: $E_p \sim x^2 \longrightarrow$ harmonisk rörelse
- Notera 2: återförande kraften $F = -\frac{dE_p}{dx}$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{kx^2}{2}\right) = -kx$$

Matematisk pendel

"simple pendulum"

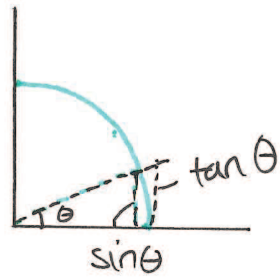


$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg\sin\theta}{m(l\cdot\theta)}\,\theta = \frac{-g}{l}\underbrace{\sin\theta}_{\neq\theta}$$

ej harmonisk

Taylor : $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$

små utslag $\longrightarrow$ $\sin\theta = \theta$



$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta}$$

Harmonisk rörelse
för en matematisk pendel
med små pendelutslag

(om $\theta = 0.1$ rad $= 5.7°$ $\longrightarrow$ $\frac{\theta^3}{3!} \approx 0.17\,\%$ av θ)

Lösning $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

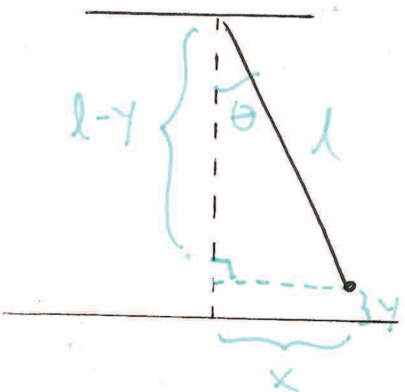
$\omega = \sqrt{g/l}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l} \\ T = 2\pi\sqrt{l/g} \end{cases}$ små utslag!

Stora utslag? Återförande kraften är överdriven med harmonisk rörelse ty $\theta > \sin\theta$

$\Longrightarrow T_{\text{stora utslag}} > T_{\text{små utslag}}$

Matematiska pendelns energi

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$



Pythagoras: $l^2 = (l-y)^2 + x^2$

$$2ly = x^2 + y^2$$

Små utslag: $x \gg y$, $x \ll l$ $\quad (y \ll x \ll l)$

$$\Longrightarrow 2ly = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2l}$$

Harmonisk rörelse generellt:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\alpha v^2 + \frac{1}{2}\beta x^2 = \text{konst.}$$

Notera: $$\frac{dE_{tot}}{dt} = \alpha v \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\frac{d^2x}{dt^2}} + \beta x \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\beta}{\alpha}x \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

w

w^2