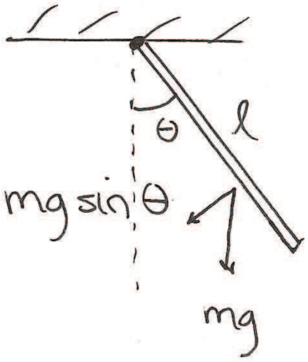
Fysisk Pendel

Newtons 2:a ~~pendel~~ lag $\quad m \dfrac{d^2x}{dt^2} = F$

"omvandlas" till $\quad I \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$

$\left\{ \begin{array}{l} I = \text{tröghetsmoment} \\ \tau = \text{kraft moment} \end{array} \right\}$

Ex. 1 "stavpendel"



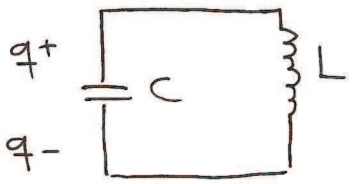
$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{1}{3} m\ell^2 \\ \tau = -\left(\frac{\ell}{2}\right) mg \sin\theta = \\ \quad = -\frac{mg\ell}{2} \sin\theta \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-3g}{2\ell} \sin\theta = \underbrace{\frac{-3g}{2\ell}}_{\omega^2} \theta \quad \boxed{\text{små utslag}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

LC-kretsen

Antag en uppladdad kondensator (via batteri) som ansluts till en spole



$$C = \frac{q}{U_C} \Longrightarrow U_C = \frac{q}{C}$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

Kirchhoff: $U_C + U_L = 0$

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} q$$

Harmonisk ~~krets~~ rörelse för LC-krets

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \begin{cases} f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ T = 2\pi\sqrt{LC} \end{cases}$$

LC-kretsens lagrade energi:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}L\underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)}_{I}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

[Energin pendlar mellan att vara lagrad i ett E- resp. B-fält]

Dämpad Harmonisk rörelse

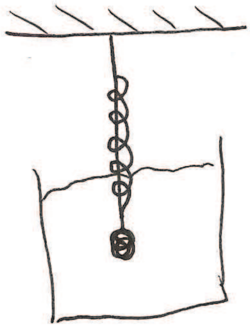
- Massa-fjäder system med dämpning
  - antag friktionskraft motriktad rörelsen

$$F_d = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

ok för måttliga hastigheter

b beror av massans form och fluidens viskositet

enhet: $\frac{N}{(m/s)} = \frac{Ns}{m} = \frac{kg}{s}$



Newton + Hooke + dämpning

$\Rightarrow$ $ma = -kx - bv$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Harmonisk oscillator med dämpning

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \left[\frac{\text{återförande kraft}}{\text{utslag} \cdot \text{massa}}\right]$$

$$\gamma = \frac{b}{m} \quad \left[\frac{\text{dämpandekraft}}{\text{hast.} \cdot \text{massa}}\right]$$

Obs!

ω_0 = egenfrekvens för odämpad oscillator

$F_d = -bv$ (linjär ekv) $\Rightarrow$ "enkel" lösning

3 fall

1) under-dämpning (svag)
2) över-dämpning (kraftig)
3) kritisk — " — (

1) Underdämpning (F_d -svag)

Antag följande lösningsform

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -A_0 e^{-\beta t}[\omega \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)]$$

$$a(t) = A_0 e^{-\beta t}[2\beta\omega \sin(\omega t) + (\beta^2 - \omega^2)\cos(\omega t)]$$

sätt in x, v och a i diff ekv.

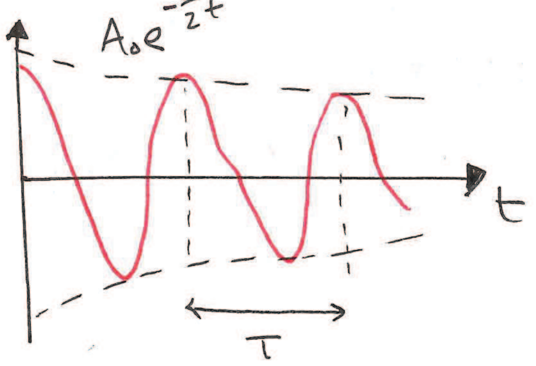
$$\Rightarrow A_0 e^{-\beta t}\left[\underbrace{(2\beta\omega - \gamma\omega)}_{=0}\sin(\omega t) - \underbrace{(\omega^2 - \omega_0^2 + \gamma\beta - \beta^2)}_{=0}\cos(\omega t)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{2} \quad \text{och} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t)$$

Harmonisk oscillator med underdämpning (svag dämpn)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$



a) $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$ underdämpning

b) $\frac{\gamma^2}{4} \ll \omega_0^2$ $\omega \approx \omega_0$

Förhållandet mellan två successiva maxima:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t_0}}{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t_0+T)}} = e^{\frac{\gamma}{2}T}$$

$\Rightarrow$ "Logarithmic" decrement": $\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{\gamma}{2}T$

2) Överdämpning (F_d - stark)

- inga oscillationer

Ansats: $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} f(t)$

$$v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{df}{dt} - \frac{\gamma}{2}f\right)$$

$$a(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{d^2f}{dt^2} - \gamma\frac{df}{dt} + \frac{\gamma^2}{4}f\right)$$

sätt in x, v och a i diff ekv.

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{d^2f}{dt^2} + \underbrace{\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)}_{-\alpha^2} f = 0$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \alpha^2 f$$

Allmän lösning: $f(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{Ae^{-(\frac{\gamma}{2}-\alpha)t} + Be^{-(\frac{\gamma}{2}+\alpha)t}}_{\text{avtagand funkt.}}$

Harmonisk oscillator med överdämpning

ty $0 < \alpha < \frac{\gamma}{2}$ negativa exponenter

3) Kritisk dämpning

$$\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Allmän lösning: $f(t) = A + Bt$

$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} + Bte^{-\frac{\gamma}{2}t}$ kritisk dämpning

1) $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$ underdämpning = dämpad oscillation

2) $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$ överdämpning - exp. avtagande

3) $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$ kritisk dämpning - snabbast återgång till jämviktsläget

Energiförluster vid dämpning

Harmonisk oscillator: $X(t) = A\cos(\omega t)$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

underdämpning: $x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}}_{A(t)} \cos(\omega t)$

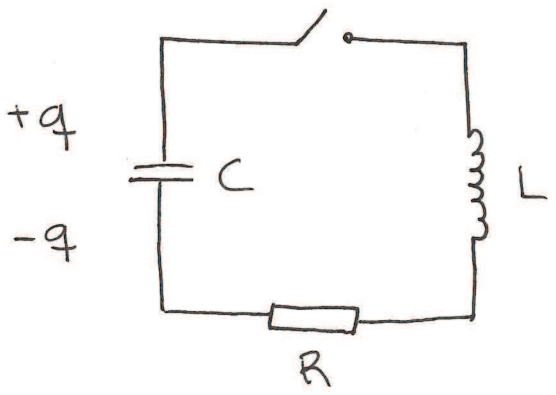
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 e^{-\gamma t}$$

Godhetstal / Q-värde

$$Q = \frac{\text{lagrad energi}}{\text{spridd energi / rad}} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

$\gamma \to 0 \longrightarrow Q \to \infty \longrightarrow$ odämpad oscillator

Dämpad elektrisk krets



$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{I} + \frac{q}{C} = 0$$

- Vinkelfrekvens: $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

Q-värde: $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q$

$$U_C(t) = U_0\, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t)$$