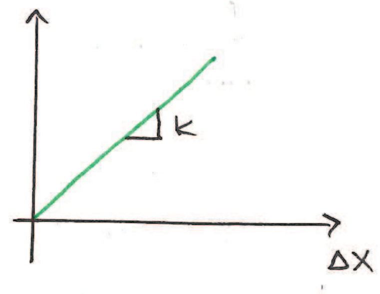
Mån LV4

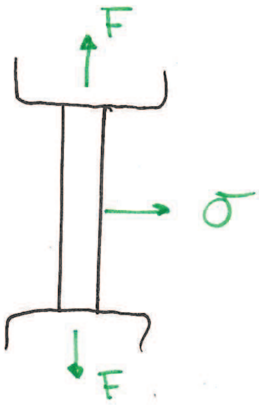
Hookes Lag

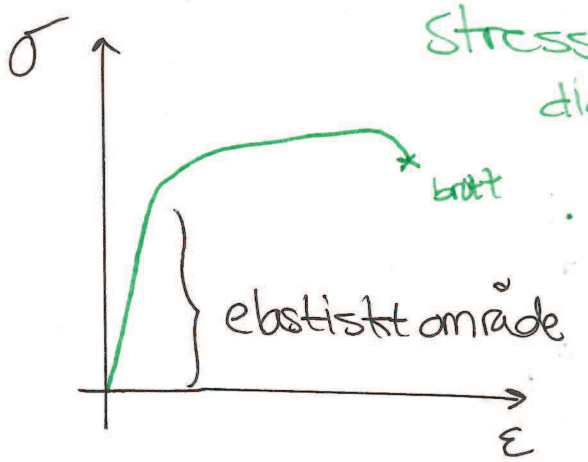
$F = k\Delta x$



~~ΔX~~!

$\sigma = E\varepsilon$ dragprov





$\sigma = \frac{F}{A}$

{elastiskt område - materialet återvänder till sin ursprungsform}

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$

E - Young's Modulus

Ex Fria svängningar

En boj har formen av en rät cylinder med $r = 0.6$ m och $m = 3000$ kg.

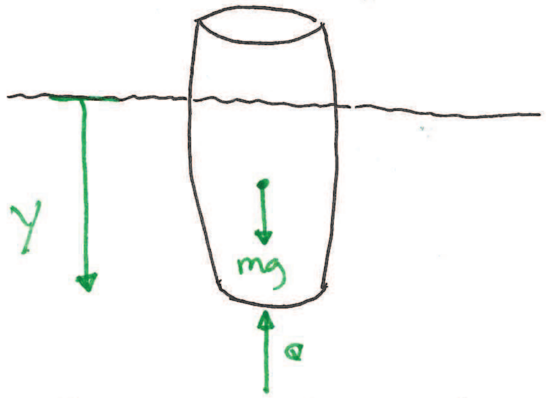
Bojen har en ~~lång~~ låg tyngdpunkt varför den flyter rakt uppåt i vattnet. $\rho_{vatten} = 1000\ kg/m^3$

små svängningar. kraften från vattnet som beror på själva rörelsen kan försummas

Beräkna T.

Antag ingen dämpning och ingen påtvingande kraft.

1. Utför koordinat, y



y - undersidans djup under ytan

2. Vilka krafter påverkar?

Tyngdkraft mg

Lyftkraft Q (Deplacements tyngd)

displacement?

$$V = \pi r^2 y \longrightarrow \cancel{g}\; Q = \pi r^2 y \rho g$$

3. $F_y = ma_y$, $F_y = mg - Q$

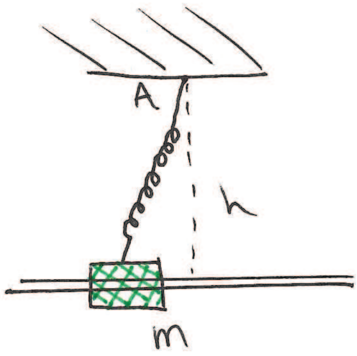
4. $\ddot{y} + \frac{\pi r^2 \rho g}{m}\left(y - \frac{m}{\pi r^2 \rho}\right) = 0$

Jmf: $\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\omega^2 = \frac{\pi r^2 \rho g}{m} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi (m)^{1/2}}{(\pi r^2 \rho g)^{1/2}} = 3.3\ s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi r^2 \rho g}{m}}$$

Ex. Fria svängningar, energi



En glatt horisontell stång som

↳ Försumma friktion

befinner sig stycket h rakt under A. Fjädern har naturlig längd b ($<h$) och styvhet k

$$F = -k\Delta x$$
$$\sigma = E\varepsilon$$

Sökt: Frekvensen

Lösning

1) Koordinat x

2) Lös med energiprincip

Teckna kinetisk och potentiell energi

Elastisk fjäder: $E_{tot} = E_k + E_p = \text{konstant}$

$$= \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Derivera Energin map t

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 0 \quad \text{ty } E_{tot} = \text{konst.}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

Dela med $\frac{1}{m\dot{x}}$ $\Longrightarrow$ $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

I detta fall

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{h^2 + x^2} - b \right)^2$$

Derivera map t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2+h^2} - b \right)^2 \right) \cancel{= m\dot{x}\ddot{x} + k\left(\sqrt{h^2+x^2} - b\right)}$$

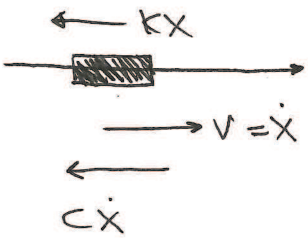
$$= m\dot{x}\ddot{x} + k\left(\sqrt{x^2+h^2} - b\right) \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{h^2+x^2}} = 0$$

$$\left\{ \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \right\}$$ Dela med $m\dot{x}$ och låt $x \to 0$

$\to$ x^2-termer försummas

$$\ddot{x} + k\frac{h-b}{mh} x = 0 \;\to\; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k - \frac{h-b}{mh}}$$

Dämpade svängningar

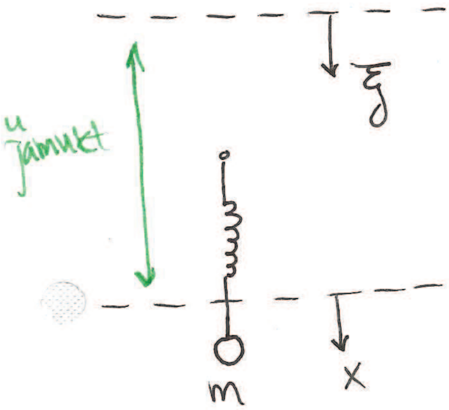


Linjär dämpning

Viskös dämpning

Påtvingade svängningar

(A) Odämpade påtvingade svängningar



Harmonisk kraft: $F_0 \cos \omega t$

— " — störning $\xi = a \cos \omega t$

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - \xi)$$

$$m\ddot{x} + kx = ka \cos \omega t = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Lösning:

Ansats $\quad x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta) \quad (2)$

δ – fasförskjutning mellan F och x

Derivering av (2) $\left(\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \cos(\omega t - \delta) \text{ expansion}\right)$

$\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta$

insättning i (1) ger:

$$A(\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \cos \delta = a \quad (3)$$

$$A(\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \sin \delta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Longrightarrow \tan \delta = 0 \quad \text{för} \quad \delta = 0, \pi$$

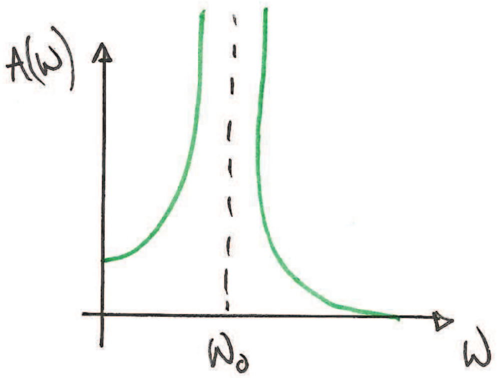
$$\delta = 0: \quad A(\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = a \iff A(\omega) = \frac{a}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

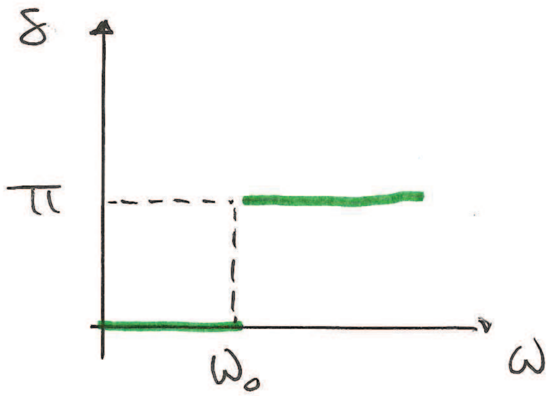
$$\delta = \pi: \quad A(\omega) = \frac{-a}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Fysik: $A(\omega) > 0$

$$\begin{cases} A(\omega) \to a \text{ då } \omega \to 0 \\ A(\omega) \to \infty \text{ då } \omega \to \omega_0 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$





(B) Påtvingade $\underbrace{\text{dämpningar}}$ med $\underbrace{\text{svängningar}}$

$F_0 \cos \omega t$, $\xi = a \cos \omega t$

Linjär dämpning $\quad D = -b\dot{x}$

Detta ger $\quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad (5)$$

Lösning

Ansats $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \delta)$

Derivera, sätt in i (5) och dela upp i

cos resp. sin termer

$$A(\omega)\left((\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + \omega\gamma\sin\delta\right) = \omega_0^2 a$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta = \omega\gamma\cos\delta$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega \to 0 & \delta \to 0 \\ \omega \to \infty & \delta \to \pi \\ \omega \to \omega_0 & \delta \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Resonans

$$\omega \to \omega_0 \longrightarrow \delta \to \frac{\pi}{2}$$

dvs förflyttningen ligger vid resonans $\frac{\pi}{2}$ efter den drivande kraften!

Obs! vid resonans rör sig massan i samma riktning som den drivande kraften

$$x = A\cos\omega t$$

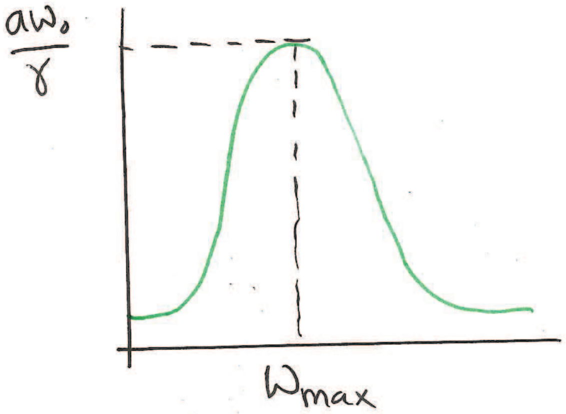
$$v = \dot{x} = -A\omega\sin\omega t$$

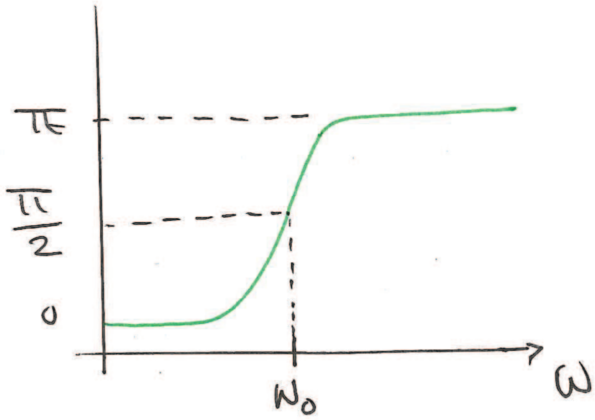
Amplitud $$A(\omega) = \frac{a\omega_0^2}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2\right)^{1/2}} \quad (8)$$

$\omega \to 0 \qquad A \to a \qquad (F_0/k)$

$\omega \to \infty \qquad A \to 0$

$\omega \to \omega_0 \qquad A \to \dfrac{a\omega_0}{\gamma}$





$A = A_{max}$ dvs nämnaren i (8) måste vara minimal

$$\omega = \omega_0\left(1 - \gamma^2/2\omega_0^2\right)^{1/2} = \omega_{max}$$

$A \sim F_0 \qquad$ A beror av ω