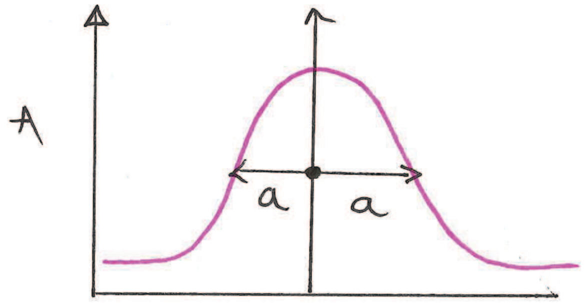
Tis LV5

Vågutbredning

Longitudinella ex ljud

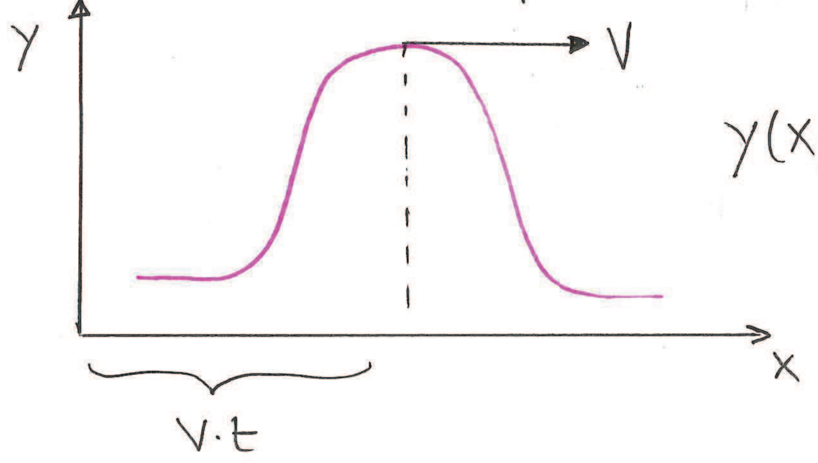
Transversella elektromagnetiska, vattenvågor

Gaussfunktionen - god beskrivning av puls i 1-dim



$$y(x) = A\exp\left(\frac{-x^2}{a^2}\right)$$

Puls i rörelse i positiv riktning längs x-axeln



$$y(x,t) = A\exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right)$$

Godtycklig vågutbredning i positiv x-riktning:

→ $f(x-vt)$

—— " —— " —— negativ x-riktning:

→ $g(x+vt)$

→ Allmänn lösning för våguttbredning i 1 Dim.

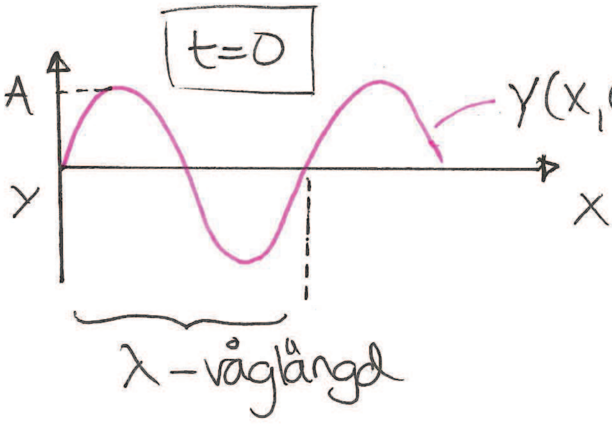
$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{positiv riktn.}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{negativ riktn.}}$$

Obs! En stående våg kan beskrivas ~~som~~ av två motriktade vågfunktioner.

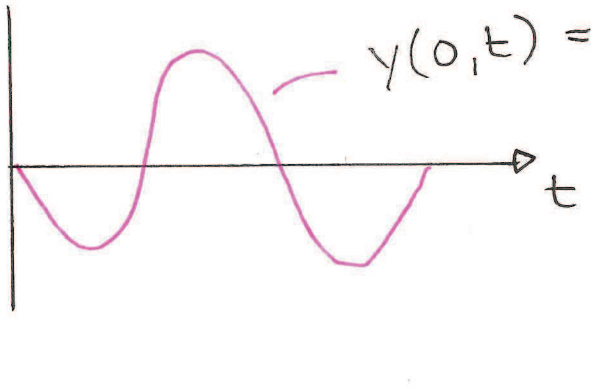
Sinusvåg i rörelse: $\quad y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{(x-vt)}_{\text{pos. riktning}}\right]$

{ λ - våglängd }

- Beskriver ex.vis elektromagnetisk våguttbredning
- även ~~som~~ en mer komplicerad vågform kan beskrivas av en kombination av sinusvågor (Fourier)



$$y(x,0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$



$$y(0,t) = A\sin\left(-2\pi\frac{v}{\lambda}t\right)$$

utbredninghast. $v = \frac{\lambda}{T}$

frekvens f (ν i boken!) $= \frac{1}{T}$

$\longrightarrow \boxed{v = f \cdot \lambda}$

$$y(x,t) = A\sin\Big(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{k} x - \underbrace{2\pi f}_{\omega} t\Big) = A\sin(kx - \omega t)$$

k: vågvektor

ω: vinkelfrekvens

våghastighet: $v = \frac{\omega}{k} = f\lambda$

Egenskaper

- sinus är udda (antisymmetrisk)

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\longrightarrow y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = -A\sin(\omega t - kx)$$

{utbredning i positiv x-riktn.}

Obs! sinus och cosinus är ekvivalenta, men fasförskjutna

$$\sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

- cosinus är jämn (symmetrisk)

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$\Longrightarrow$ $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) = A\cos(\omega t - kx)$

(utbredning i positiv x-riktn.)

utbredning i negativ riktning

$$y_1(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

Alternativ beskrivning via Eulers $\left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\right)$

$$y(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

Realdelen representerar en fysikalisk storhet

Vågekvationen

Allmän vågfunktion: $\underline{y = f(x - vt) + g(x + vt)}$

1) betrakta först f och gör en variabelsubst.

$$u = x - vt \longrightarrow f(u)$$

2) derivera f map x: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$

3) andra derivatan: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

4) derivera pss map t $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

5) kombinera (3) och (4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

6) pss med g som rör sig åt vänster $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

7) spp av f och g: $\dfrac{\partial^2 (f+g)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 (f+g)}{\partial x^2}$

y kan representeras position, tryck, elektrisk spänning, temp.

$\rightarrow$ ofta en generell symbol ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

vågfunktionen i 1-dim

Allmän lösning: $\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

speciell lösning: $\psi(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$

Vibrerande sträng

En spänd sträng med spännkraft T (N) och linjär masstäthet μ ($\frac{kg}{m}$)

undersök spännkraftens inverkan på rörelsen hos ett strängelement i x- resp y-riktning x-riktning