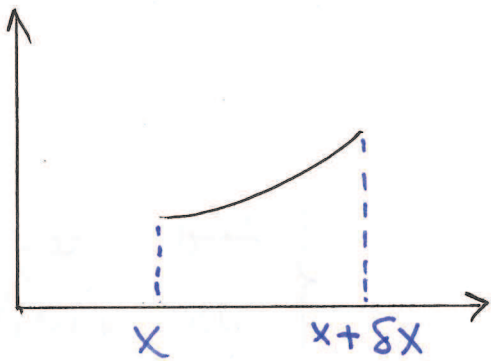


# Vågens energi (inspänd sträng)

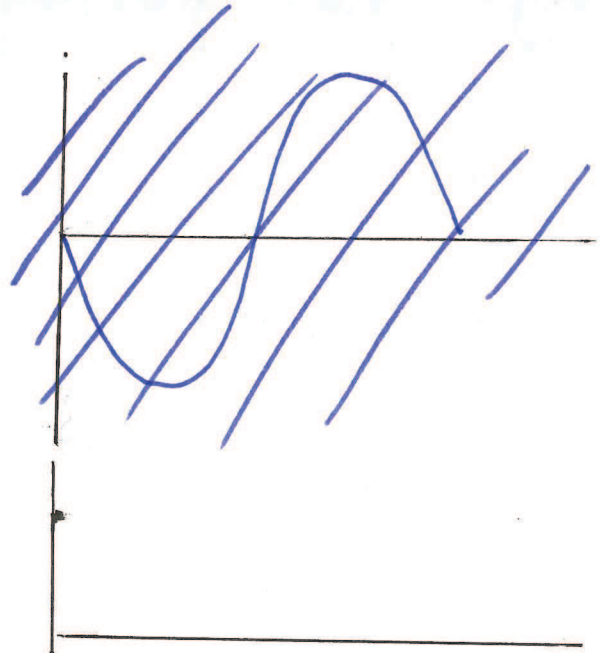
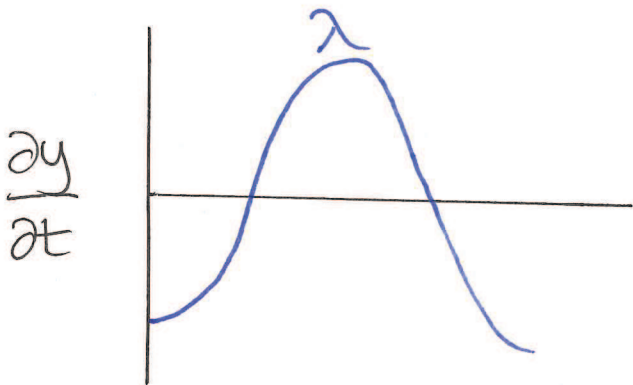
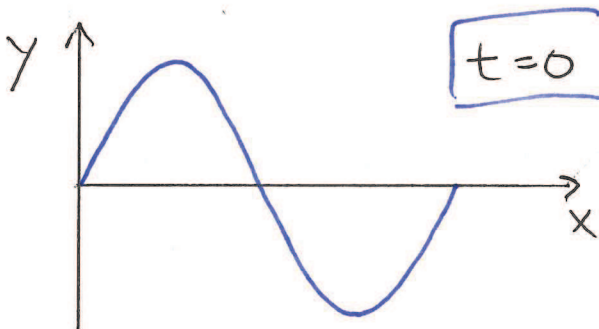
Ons LV 5

Strängsegmentets rörelse energi:  $E_k = \frac{1}{2} \underbrace{\mu \delta x}_m \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{v_y^2}$

Potentill energi (kan häftas):  $E_p = \frac{1}{2} T \delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$



Antag  $y = A \sin(\underbrace{kt - \delta}_{kx - \omega t}) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$



Obs!  $E_{k,max}$  inträffar samtidigt med  $E_{p,min}$

Total kinetisk energi per våglängd

$$E_{k,\lambda} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

Total potentiell energi per våglängd

$$E_{p,\lambda} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

$$\rightarrow E_{tot,\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{total energi} \\ \text{per våglängd} \end{array} \right.$$

## Vågor vid gränssytor

× Gränssyta (diskontinuitet) - skilljer ett medium  
& från ett annat där hastigheten ändras

$$v_1 \rightarrow v_2$$

× En del ~~har~~ <sup>av</sup> inkommande våg reflekteras,  
resten transmitteras med bibehållen frekvens!

× Antag två sammanfogade snåror med olika  
masstäthet  $\mu_1$  och  $\mu_2$  (Obs!  $T = \text{konst}$ )



→ Två olika hastigheter,  $v_1$  och  $v_2$   
även olika våglängder  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$

### Randvillkor

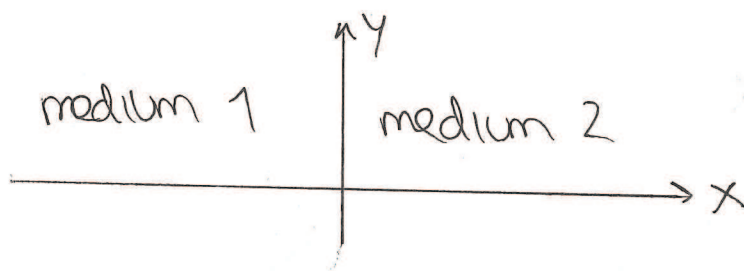
(1)  $y$  kontinuerlig i gränssytan  
→  $\omega_1 = \omega_2$

(2)  $\frac{\partial y}{\partial x}$  (lutningen) måste vara lika på båda  
sidor

Antag att  $x=0$  vid gränssytan

inkommende våg:  $y_I = A_1 \cos(\omega t - k_1 x)$

transmitterad:  $y_T = A_2 \cos(\omega t - k_2 x)$



reflekterad våg:  $y_R = B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$

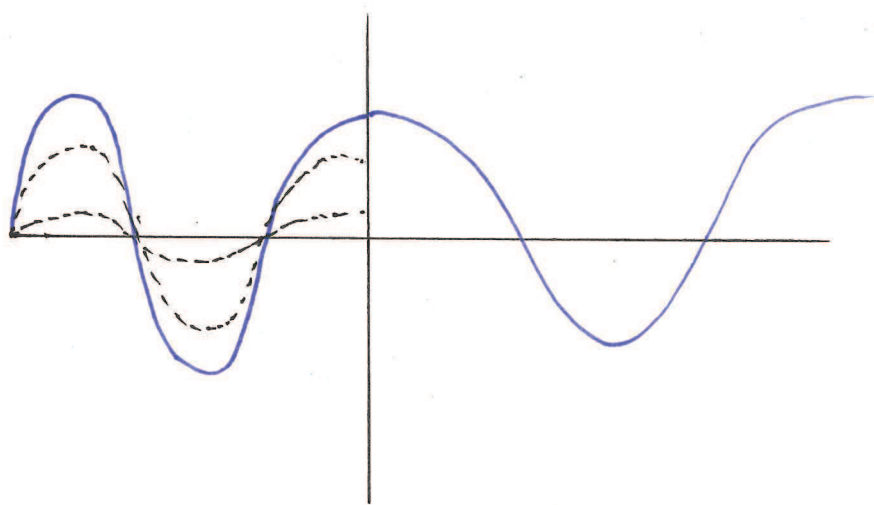
Medium 1: (superposition)

$$y_1 = y_I + y_R$$

$$\rightarrow y_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$$

Medium 2:

$$y_2 = y_T = A_2 \cos(\omega t - k_2 x)$$



Randvillkor 1

$$y_1 = y_2 \quad \text{vid } x=0$$

$$A_1 \cos(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = A_2 \cos(\omega t)$$

$$A_1 + B_1 = A_2$$

Randvillkor 2

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad \text{vid } x=0$$



$$k_1 A_1 \sin(\omega t) - k_1 B_1 \sin(\omega t) = k_2 A_2 \sin(\omega t)$$

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2$$

Transmissionskoeff. för amplitud:

$$T_{12} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2V_2}{V_1 + V_2}$$

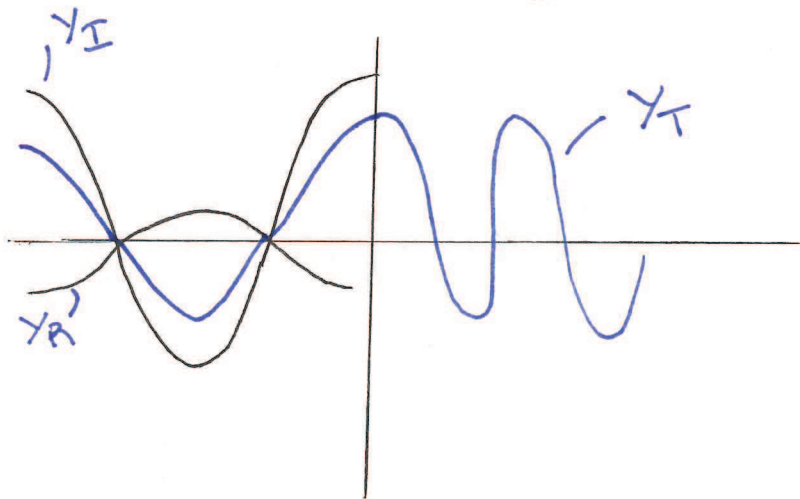
$$\left. \begin{array}{l} \text{ty } k = \frac{\omega}{v} \\ \omega = \text{konst.} \end{array} \right\}$$

Reflektionskoeff. för amplitud

$$R_{12} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{V_2 - V_1}{V_1 + V_2}$$

Obs! Om  $k_2 > k_1 \rightarrow$  Neg.  $R_{12}$

$\rightarrow$  Reflekterad våg fasförskjuten  $\pi$  rad



Randvillkor 1:  $\rightarrow T_{12} = 1 + R_{12}$

Elektromagnetisk strålning (ljus etc.)

$$\text{brytningsindex } n = \frac{c}{v} = \frac{\text{ljusets hastighet i vakuum}}{\text{ljusets hastighet i medium}}$$

Eftersom  $v = \frac{\omega}{k}$

$$\Rightarrow n = \frac{c}{\omega} k$$

$$T_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad R_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \text{brytningsindex - inkommande ljus} \\ n_2 = \text{--- " --- transmitterat ljus} \end{array} \right.$

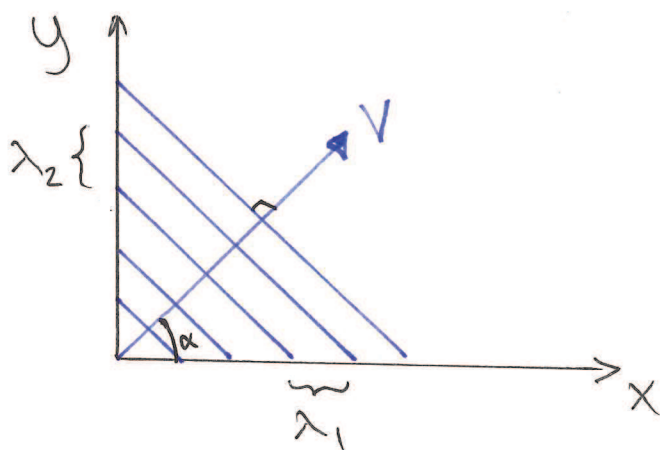
Transmitterad effekt:  $T_{12}^2 = \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$

Reflekterad effekt:  $R_{12}^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}} \right\} \text{vågekv. i 2D}$$

$$v = \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \text{ytspänning } \left( \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \\ \sigma = \text{masstäthet } \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) \\ \text{per area} \end{array} \right.$$

Plan våg - har en rak vågfront



Lösning:  $z(x, y, t) = A \cos(k_1 x + k_2 y - \omega t)$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

riktning:  $\tan \alpha = \frac{k_2}{k_1}$

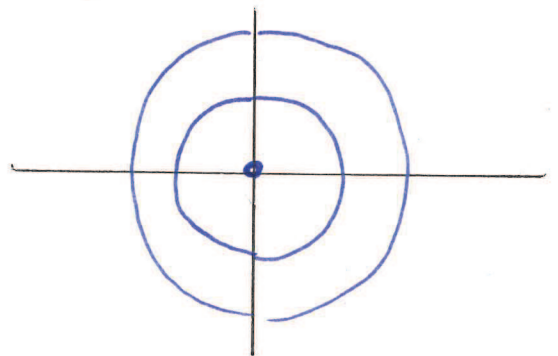
$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$$

Cirkulär våg - cirkulär vågfront (punktkälla)

Amplitud  $A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

Intensitet  $I = \frac{P}{\text{längdenhet}}$

$$I = \frac{1}{r^2}$$



Sfärisk våg - sfärisk vågfront (punktkälla)

$$A \approx \frac{1}{r^2}$$

$$I \approx \frac{1}{r^2} \quad I = \frac{P}{\text{areanhet}}$$

Om  $r \rightarrow \infty \Rightarrow$  sfärisk  $\rightarrow$  plan våg