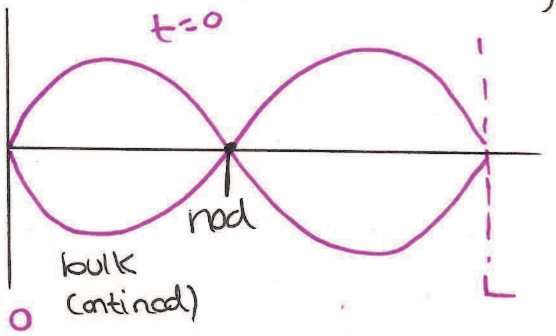
Stående vågor

Tors LV5

- Kan beskrivas av två motriktade vågor med samma A och f

- Antag en inspänd sträng mellan 0 och L



- Amplitud beror av x
- Varje strängsegment genomgår harmonisk svängningsrörelse

→ Lösningsform: $y(x,t) = \underbrace{f(x)}_{\text{amplitud}} \cos \omega t$

→ Vågekv. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x)\cos(\omega t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x}\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow -\omega^2 f(x)\cancel{\cos(\omega t)} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cancel{\cos}(\omega t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f(x)$$

{ Vågekv. för en stående våg

Jämför SHM: $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x(t)$

$\rightarrow$ Lösn. $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Allmänn lösningsform för stående våg:

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right)$$

Randvillkor

1) $f(0) = 0 \rightarrow \underbrace{A\sin(0)}_{0} + B\underbrace{\cos(0)}_{1} = 0 \rightarrow B = 0$

2) $f(L) = 0 \rightarrow A\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) = 0 \rightarrow \frac{\omega}{v}L = n\pi \quad n = 1, 2, \ldots$

$(n = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} \rightarrow f_n(x) = A_n\sin\left(\frac{n\pi v}{Lv}x\right)$$

$$= \underbrace{A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{x-beroende amplitud}}$$

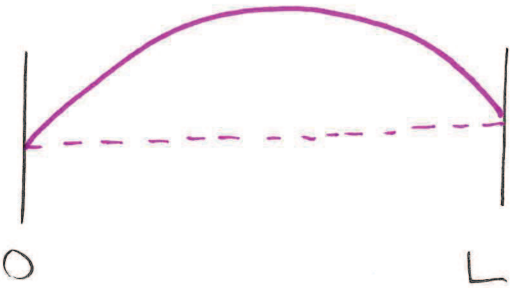
$$\rightarrow y_n(x,t) = A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Stående våg för inspände sträng

Grundton ("fundamental mode" / "first harmonic"): $\boxed{n = 1}$

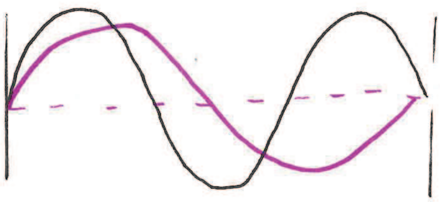
$\Rightarrow \quad f_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$



$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$y_1(\cancel{x}, t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cos(\omega_1 t), \quad \omega_1 = \frac{\pi v}{L}$$

Övertoner



$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$$\omega_n = n \frac{\pi v}{L}$$

{ För en harmonisk serie av övertonernas frekvens heltalsmultipler av grundetonens frekvens

Ex Stående vågor:

{ ljud från instrument
mikrovågsugn
kvantmekanik

Superposition av motriktade vågor

Utnyttja $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ och $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

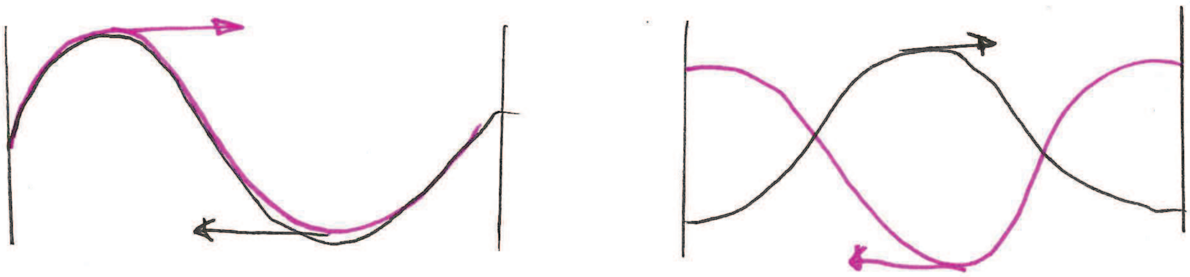
$\longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

$\Longrightarrow y(x,t) = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$

Trig. identitet: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

$\Longrightarrow y(x,t) = \frac{A_n}{2}\left[\sin(k_n x + \omega t) + \sin(k_n x - \omega t)\right]$

En stående våg kan alltså beskrivas av två motriktade vågor med samma A och f.

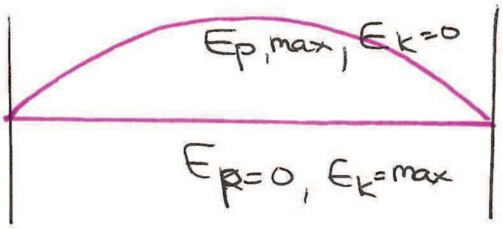


Energi hos stående vågor

Två motriktade, likadana vågor

$\hookrightarrow$ ingen nettotransport

Betrakta E_k och E_p för ett strängsegment



$$E_n = \frac{1}{4}\mu L A_n^2 \omega_n^2 \left(\underbrace{\sin^2 \omega_n t}_{\text{"}E_k\text{"}} + \underbrace{\cos^2 \omega_n t}_{\text{"}E_p\text{"}} \right) = \frac{1}{4}\mu L A^2 \omega_n^2$$

Normal moder för stående vågor

För normalmoder gäller

1) alla massor (hela strängen) svänger med samma P

2) oberoende ("okopplade")

3) allmän lösning = superposition av normalmoder

n:e normalmoden: $y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)\cos(\omega_n t)$

$$\left\{ \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \right\}$$

Allmän lösning: $y(x,t) = \sum_n y_n(x,t)$

Fourier analys

En godtycklig periodisk vågform f(x) för en inspänd sträng mellan

$$f(x) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$