

# Dispersion

Mån Lv 7

- monokromatisk vågutbredning: endast en frekvens
- — " — ljus: endast en färg

Ex.  $\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$ , def i  $[-\infty, \infty]$

• Våg hast.  $V = \frac{\omega}{k} = f\lambda$

• Om  $V$  är oberoende av  $\omega$  (eller  $f$ ) } ex. ljus i vakuum  
→ Våg i icke-dispersivt medium } ljud i luft

# Svämningar

Antag superposition av två monokromatiska vågor i ett icke-dispersivt medium.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ \psi_2 = A_1 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{array} \right\} \rightarrow V = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

Trig. identitet.  $\underbrace{\cos(k_2 x - \omega_2 t)}_{\alpha} + \underbrace{\cos(k_1 x - \omega_1 t)}_{\beta} = 2 \cos \alpha \cos \beta$

$$\rightarrow \alpha = \frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

$$\beta = \frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A_1 \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$

Enklare fall: sätt  $x=0$  (cos x ä jämn)

$$\Rightarrow \psi = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

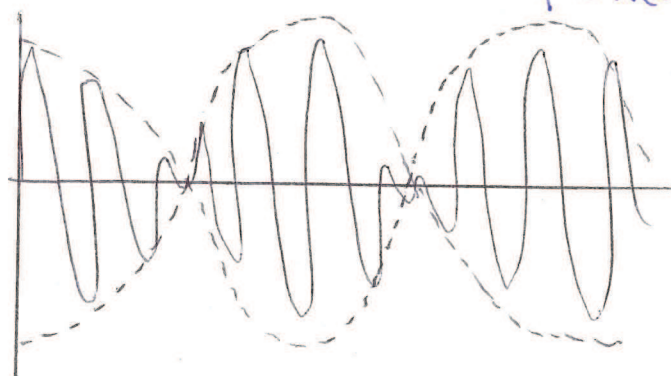
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{A(t)}$$

special fall  $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega_0$  {medelvärde!}

sätt  $\omega_s = \omega_2 - \omega_1$

$$\rightarrow \psi = A(t) \cos(\omega_0 t) = A \cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) \cos(\omega_0 t)$$

Obs!  $\frac{\omega_s}{2} \ll \omega_0$



Srävningssfrekvens:

$$f_s = f_2 - f_1 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{\omega_s}{2\pi}$$

# Amplitudmodulering

En monokromatisk våg förmedlar ingen information ty  $A$  och  $f$  är konst.

Informationsöverföring kräver modulering

1) Amplitudmodulering - AM

• ~~bär~~ bärvägens amplitud varierar med signalstyrkan

2) Frekvensmodulering - FM

frekvensen varierar med — " —

3) Fasmodulering - PM

① AM av radiovågor (EM!)

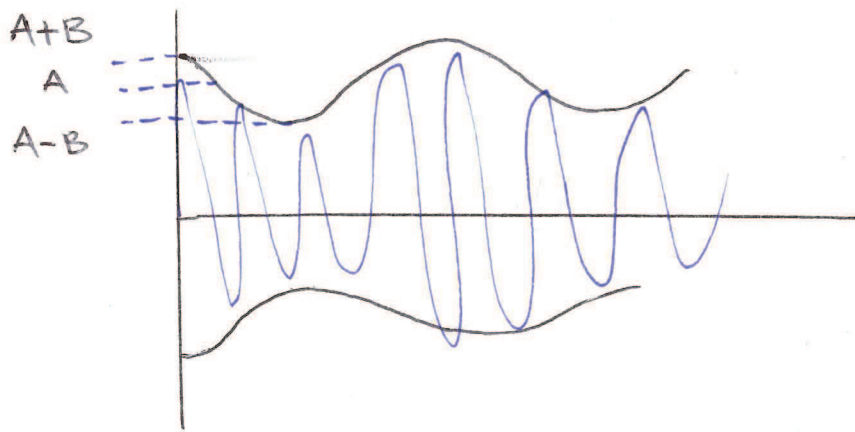
• - bärväg =  $\omega_c$ , typiska frekvens  $f \approx 100 \text{ kHz} - 100 \text{ MHz}$   
carrier

• - modulering  $\omega_m$ , informationssignal ex, ljud  
 $f \approx 20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz}$

$$\psi = \underbrace{(A + B \cos \omega_m t)}_{\text{amplitud}} \sin \omega_c t$$

$B =$  modulationsdjup ( $B < A$  för att undvika distortion)

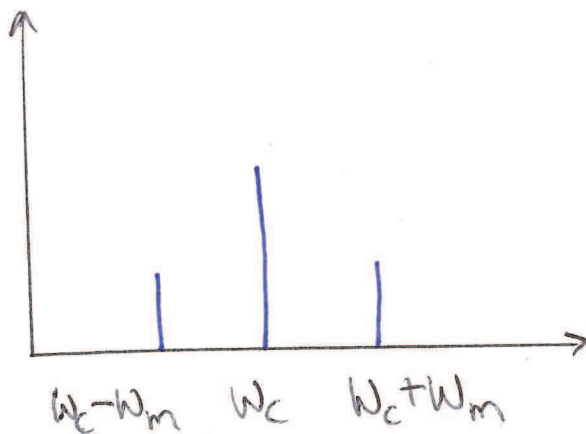
Obs!  $\omega_m \ll \omega_c$



Trig identity:  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\rightarrow \psi = A \sin \omega_c t + \frac{B}{2} [\sin(\omega_c - \omega_m)t + \sin(\omega_c + \omega_m)t]$

Messbare Freqenzspektrum



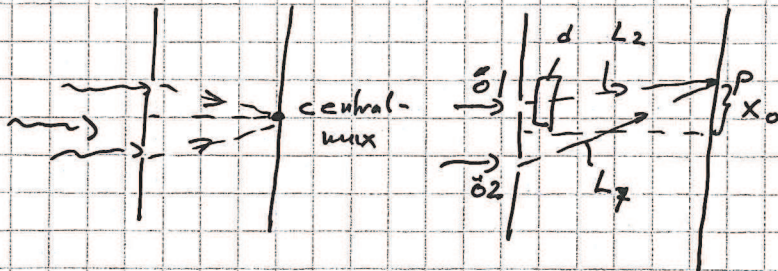
Lösning uppgift 7 på tentamen 110819 (FF4615)

Optisk väg = geometrisk väg  $\times$  brytningsindex

$$L = s \cdot n$$

Utsäugsuppställning

Med glimmerskiva



öppning 1 =  $o_1$

öppning 2 =  $o_2$

optiska vägen  $L_1 =$

geometriska vägen  $s =$

sträckan  $o_2 - P$

Optiska vägen  $L_2 =$

$$= s_2 - d + n \cdot d =$$

= geometriska vägen  $o_1 - P$

minus glimmerskivans tjocklek + optiska vägen genom

glimmerskivan.

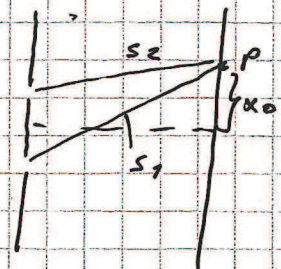
glimmerskivan.

Centralmax vid P om  $h_1 = h_2$

$$\therefore L_1 = s_1 = L_2 = s_2 + d(n-1)$$

$$s_1 - s_2 = d(n-1) \quad (1)$$

Monokromatiskt ljus med  $\lambda = 480 \text{ nm}$



30 min (och där 30 max)

Mellan över sträckan  $x_0$

$$s_1 - s_2 = 30 \lambda \quad (2)$$

Kombinera (1) och (2)  $\Rightarrow s_1 - s_2 = 30 \lambda = d(n-1)$

$$\rightarrow d = \frac{30 \lambda}{n-1} = \frac{30 \cdot 480 \cdot 10^{-9}}{1.6-1} = 24 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{24 \mu\text{m}}}$$

# Vågor i dispersiva medier

Våghastigheten är frekvensberoende  $v(\omega) = \frac{\omega}{k}$

$$\rightarrow \boxed{\omega(k) = v(k) \cdot k} \quad \left. \vphantom{\omega(k)} \right\} \begin{array}{l} \text{mediets} \\ \text{dispersionsrelation} \end{array}$$

Antag två monokromatiska vågor ( $\omega_1 \approx \omega_2$ )

$$\psi_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\psi_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Obs! Olika våghast.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \\ v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} \end{array} \right.$$

"Satt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_1 + \psi_2 = A(x,t) \cos(k_0 x - \omega_0 t) \\ A(x,t) = 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \end{array} \right.$$

1) Härled  $v$  från  $\cos(k_0 x - \omega_0 t) =$

sätt  $k_0 x - \omega_0 t = \text{konst.}$

$$x = \frac{\omega_0 t}{k_0} + \frac{\text{konst}}{k_0}$$

$$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}$$

2) Härled  $v_g$  från  $A(x,t) \sim \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)$

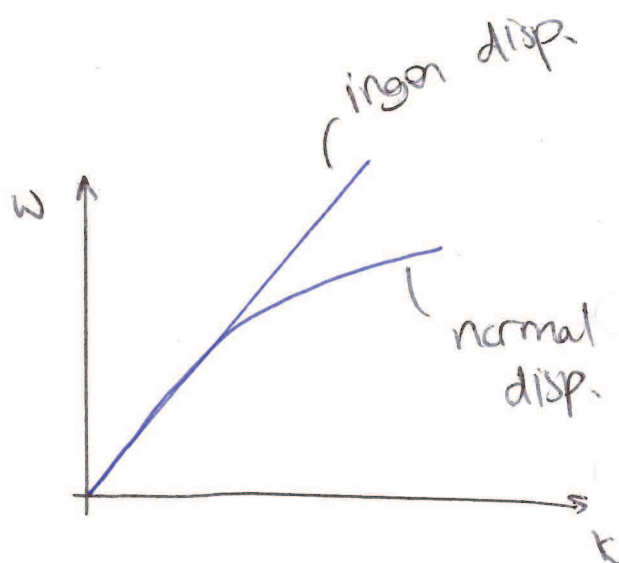
$$\Rightarrow v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

Fas hastighet  $v = \frac{\omega}{k}$

Grupp hastighet  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Normal dispersion:  $v_g < v$

Ingen dispersion:  $v_g = v$



# Elektromagnetiska vågor

1 Vakuum:  $v_{\text{vakuum}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

$\epsilon_0$  - elektriska konstanten / permittiviteten för vakuum /  
dielektricitetskonstanten för vakuum

$$= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$\mu_0$  - magnetiska konstanten / permeabiliteten  
för vakuum

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

1 medium:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  { dielektriskt material }

brytningsindex  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}} = \underbrace{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}_{\text{relativ}}$

$\epsilon_r$  - permittivitetstalet / relativa ~~permitt~~  
dielektricitets konstanten

$\mu_r$  - permeabilitetstalet



Luft:  $\epsilon_r \approx 1$

Vakuum  $\epsilon_r \equiv 1$

För de flesta material (icke-magnetiska):  $\mu_r \approx 1$

$$\rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Fas- och grupp hastighet för EM-vågor (kan härledas):

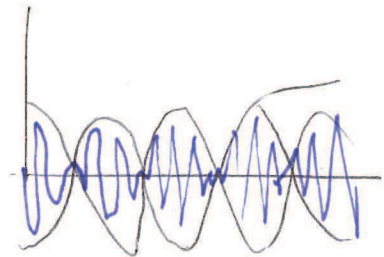
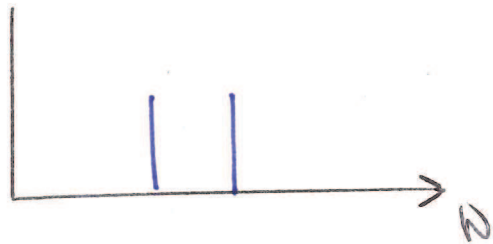
$$v \cdot v_g = c^2$$

Normal dispersion i medium:  $v_g < v$

$\rightarrow$  1) fashastigheten  $v > c$  { ingen signalöverföring }

2) grupp hastighet  $v_g < c$  { information }

Två vågor



Grupp av vågor

