Tors LVC 7

Sammanfattning

Harmonisk rörelse

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{F_{\text{återförande}}}{x \cdot m} \\ \omega = \text{vinkel frekvens} \end{cases}$$

Lösn. $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

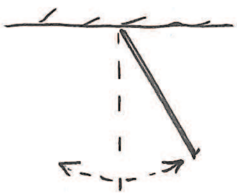
(1) Massa-fjäder $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(2) Matemat. pendel $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

(3) LC-krets $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(!) Fysisk pendel $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

ex. en stav



Dämpad harmonisk rörelse

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{F_{\text{återf.}}}{x \cdot m} \\ \gamma = \dfrac{b}{m} = \dfrac{F_{\text{dämp}}}{v \cdot m} \end{cases}$$

Lösn.

① $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ underdämpning – dämpad oscillation

$$x = A_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

② $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ överdämpning – exponentiellt avtagande

$$x = A \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right)t\right) + B \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right)t\right)$$

③ $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ kritisk dämpning – snabbast återgång

$$x = A \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) + Bt \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right)$$

① underdämpat: logaritmiskt decrement

$$\longrightarrow \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \frac{\gamma}{2} T$$

Godhetstal / kvalitetsfaktor: $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$

Vågutbredning

- positiv riktning $= f(x-vt)$
- sinusvåg: $g(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] = A\sin(kx-\omega t)$

  där $v = \frac{\omega}{k} = f\lambda$

- Vågekv. (1-dim): $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

Allmän lösning: $\psi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

spec. lösning: $\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$

- Vibrerande sträng: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
- Total energi per våglängd: $E_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\lambda$
- Total effekt: $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$
- Transmissionskoeff. $T_{12} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1+k_2} = \frac{2v_2}{v_1+v_2} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$
- Reflektionskoeff. $R_{12} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} = \frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$

brytningsindex (EM): $n = \frac{c}{v}$ $\quad \frac{\text{ljusets hastighet i vakuum}}{\text{hastigheten i mediet}}$

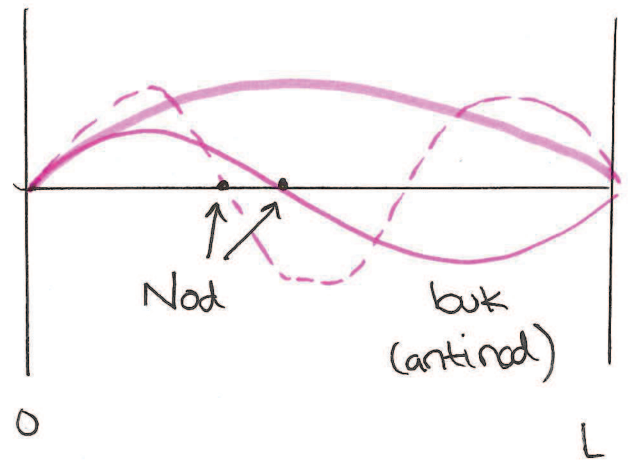
elektromagnetiska vågor

- Cirkulära vågor (2-dim): $A \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \rightarrow I \sim \frac{1}{r}$
- Sfäriska vågor (3-dim): $A \sim \frac{1}{r} \rightarrow I \sim \frac{1}{r^2}$
- Plan våg: rak vågfront

Stående vågor

Lösn:

Inspänd sträng: $y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(\omega_n t)$



$$\begin{cases} L = n\frac{\lambda_n}{2} \\ \omega_n = n\frac{\pi}{L}v \end{cases}$$

- normalmod = oberoende svängningsrörelse
- $\rightarrow$ flera normalmoder kan svänga på samma sträng
- Energi för en normalmod: $E_n = \frac{1}{4}\mu L A_n^2 \omega_n^2$

Fourieranalys

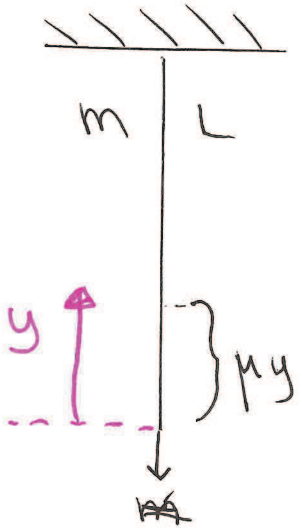
Godtycklig periodisk vågform mellan 0 och L

$$f(x) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

där fourierkoefficienterna kan beräknas:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

5.91



a) visa $v = \sqrt{gy}$

$\mu = \frac{m}{L}$

$T =$