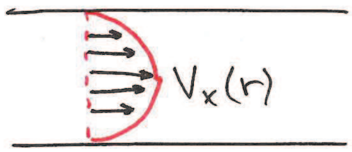
Hagen-Poiseuilles ekv

Mån Lv2



kontrollvolymen är en cirkelring! som varierar i r-riktning (Δr) och x-riktning (Δx) (Fig 8.1)

Rörelsemängdsbalans $\quad rm^{in} \equiv rm^{ut}$ (hastigheten konst.)

$$\sum F_x = 0$$

- tryckkrafter
- tyngdkrafter (kan försummas ty inga tyngdkrafter i x-led)
- skjuvkrafter

tryckkrafter

$$\sum F_x = p\underbrace{(2\pi r \Delta r)}_{A}\Big|_x - \left(p(2\pi r \Delta r)\Big|_{x+\Delta x}\right) +$$

$$+ \tau_{rx}(2\pi r \Delta x)\Big|_{r+\Delta r} - \tau_{rx}(2\pi r \Delta x)\Big|_r$$

skjuvspänning

Dela med $2\pi r \Delta r \Delta x$

$$\Longrightarrow \; = \frac{p(\cancel{2\pi r} \Delta r)|_x - p(\cancel{2\pi r} \Delta r)|_{x+\Delta x}}{\cancel{2\pi r} \Delta r \Delta x} \; + \; \frac{\tau_{rx}(\cancel{2\pi r} \cancel{\Delta x})|_{r+\Delta r} - \tau_{rx}(\cancel{2\pi r \Delta x})|_r}{2\pi r \Delta r \cancel{\Delta x}}$$

Låt $2\pi r \Delta r \Delta x \to 0$!

$$\Longrightarrow \sum F_x = -\frac{dP}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\tau_{rx} r) \iff$$

$$\iff -r\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr}(\tau_{rx} r) = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = \text{konstant}$$

Fullt utvecklad (hastigheten är konstant i x-riktn. under hela förloppet)

Integrera! $\Rightarrow$

$$\tau_{rx} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad ; \quad C_1 = 0 \quad \text{begr. i } r=0$$

$$\Rightarrow \tau_{rx} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2}$$

Vet att $\tau_{rx} \equiv \mu \frac{dV_x}{dr}$

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2}$$

Integreras igen!

$$V_x = \frac{dP}{dx}\frac{r^2}{4\mu} + C_2$$

Randvillkor: $V_x(R) = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{dP}{dx} + \frac{R^2}{4\mu}$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{V_x} = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\mu}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

Hagen-Poiseuilles ekv.

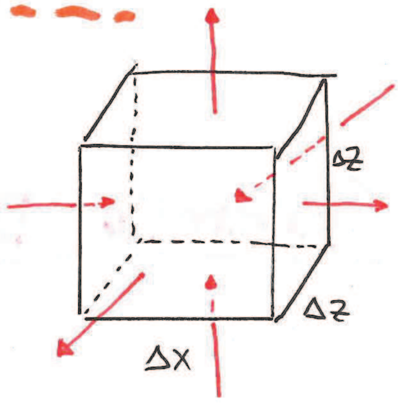
Medelhastighet: $V_{avg} = \frac{1}{A}\iint_A V_x \, dx = \dots = \frac{1}{2}V_{max}$

$$\left\{ V_{max} = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\mu} \right\}$$

Lösningsgång

1. Definiera problemet (skiss)
2. Balans
3. Kontrollvolym
4. Förenklingar
5. Vilka krafter
6. Relation mellan τ och V
7. Randvillkor

Generell Differentiell Massbalans



Kontrollvolym

$$\iint_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho\, dV = 0$$

{ eftersom balansen är generell kan vi inte göra antagandet att förloppet är stationärt, dvs $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ }

$$\underbrace{\left(\rho V_x\big|_{x+\Delta x} - \rho V_x\big|_x\right)\cancel{\Delta y \Delta z}}_{\Delta x} + \underbrace{\left(\rho V_y\big|_{y+\Delta y} - \rho V_y\big|_y\right)\cancel{\Delta x \Delta z}}_{\Delta y} +$$

$$+ \underbrace{\left(\rho V_z\big|_{z+\Delta z} - \rho V_z\big|_z\right)\cancel{\Delta x \Delta y}}_{\Delta z} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho\, \overbrace{\cancel{\Delta x \Delta y \Delta z}}^{\text{volymen}}\Big) = 0$$

{ dela med $\Delta x \Delta y \Delta z \to 0$ }

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) \equiv \nabla \cdot \rho \vec{V}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

① **Specialfall:** Stationärt $\Longrightarrow$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

② **Specialfall:** Inkompressibelt $\Longrightarrow$ $\rho = \text{konstant}$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Generella Differentiell rm-balans

(samma CV som förut) (Fig 9.2)

3 krafter: { tryck, friktion, gravitation

$\Longrightarrow$ **Navier-Stokes ekv.**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}\right) = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

- inkompressibel strömning $\rho = \text{konst.}$
- konstant viskositet (Newtonsk) $\mu = \text{konst.}$
- (laminär strömning)