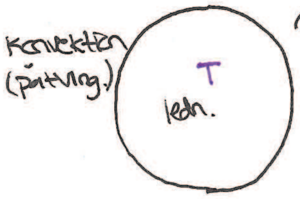
Julskinka : Instationär värme

Tis LV4

Ex. Julskinka

Sökt: Tid till färdig dvs då $T_{centrum} = 70\,°C$



Approximera som sfär!

Två fall: på spisen eller i ugnen

T_∞

omgivningens temp.

Konvektion: $q = hA(T_\infty - T_{yta})$

skinkans yttemp.

Ledning: $\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{ack} = \underbrace{k \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)}_{in-ut}$

{ obs! Instationärt! }

{ Appendix F: Diagramlösningar för instationära värmeledningsproblem! }

Data:

$T_0 = 22\,°C$ $\qquad c_p = 3.5\ kJ/kg\cdot K$

$k = 0.981\ J/msK$ $\qquad m = 2.3\ kg$

$\rho = 1.6\cdot 10^3\ kg/m^3$ $\qquad D = 0.14\ m$

Fall 1: ugn

$h = 4\ W/m^2K$

$T_\infty = 200\,°C$

Fall 2: kokning

$h = 4000\ W/m^2K$

$T_\infty = 100\,°C$

Appendix F!

$$Y = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0}$$ "Unaccomplished change"

$$x = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$ Relativ tid

$$n = \frac{x}{x_1}$$ "Var nånstans vi är i sfären" Relativ position

$$m = \frac{k}{h x_1}$$ Relativ resistans

(1) Fall 1

$$Y = \frac{200 - 70}{200 - 22} = 0.73$$

$n = 0$ vi är i centrum!

$$m = \frac{0.981}{4 \cdot 0.07} = 3.5$$

$x = ?$ $x = x(t) \rightarrow$ vi söker t!

"Avläsning i diagram" (App. F)

$$x \approx 0.5 = \frac{\alpha t}{x_1^2} \Rightarrow t = 3.9 \text{ h} \quad \{\alpha = f(k, \rho, c_p)\}$$

② Fall 2:

$$Y = \frac{100-70}{100-22} = 0.39$$

$$n = 0$$

$$m = 3.5 \cdot 10^{-3}$$

Samma diagram $\longmapsto$ $x \approx 0.15 = \frac{\alpha t}{x_1^2}$

$\Longrightarrow t = 1.2\ h$

Biots Tal (dimensionslöst)

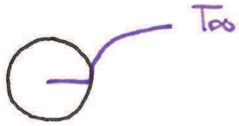
$$Bi = \frac{\text{inre (ledning) motstånd}}{\text{yttre (konvektion) motstånd}} = \frac{1/(K/L)}{\frac{1}{h}} = \frac{hL}{K}$$

(L = karaktäristisk längd)

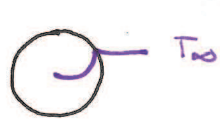
{ om Bi stort: inre motstånd dominerar
Bi litet: yttre —"—"— }

3 fall

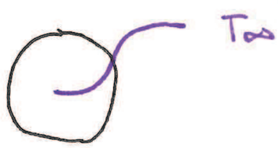
① $Bi \ll 1$ yttre motstånd dominerar
enkel lösning



② $Bi \gg 1$ inre motstånd dominerar
diagram lösning

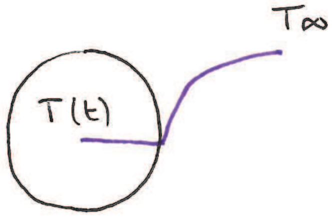


③ $Bi \approx 1$ inget motstånd dominerar
diagram lösning



{ Gränser för omslag beroende på geometri står i boken! }

Bi << 1



$$\begin{pmatrix}\text{Tillförd energi} \\ \text{med konvektion}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ackumulation} \\ \text{av energi}\end{pmatrix}$$

$$hA(T_\infty - T) = \underbrace{V}_{\text{volym}} \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

Randvillkor: $T(0) = T_0$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hAt}{\rho V c_p}\right)$$

Generell transportekv. för värme

Balans Ack = In − Ut + Prod

Fouriers lag: $\vec{q} = -kA\nabla T$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla T\right) = k\nabla^2 T + q$$

Ack. strömning ledning prod.

$$\begin{cases} c_p \simeq c_v \text{ i fasta kroppar och vätskor} \\ \rho = \text{konst.} \end{cases}$$

Jämför med Navier-Stokes!

Konvektion

Påtvingad konv.

$$Nu = Nu(Re, Pr)$$

(alt. $St. = \frac{Nu}{Re\,Pr} = St(Re, Pr)$

Naturlig konv.

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{\text{verklig transport med konvektion}}{\text{fiktivt fall med enbart ledning}}$

Nusselt

$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\text{tröghetskrafter}}{\text{friktionskrafter}}$

Reynolds

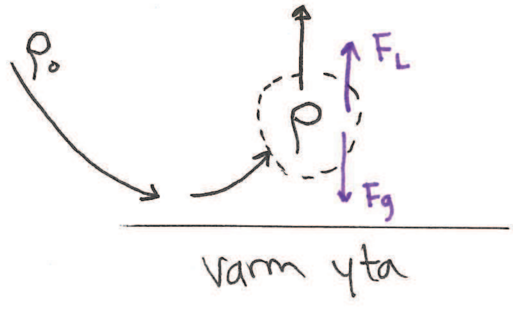
$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{betydelse av rm-transport}}{\text{betydelse av värme-transport}}$

Prandtl

$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\text{lyftkrafter}}{\text{friktionskrafter}}$

Grashof

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T)$$



$$\left.\begin{aligned} F_g &= \rho V g \\ F_L &= \rho_0 V g \end{aligned}\right\} \text{netto: } F_L - F_g = Vg(\rho_0 - \rho) = Vg\,\beta \Delta T \rho_0$$