Mån Lv2

$\boxed{2.2.4}$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$f_{16}(\theta) = \theta^2$ har Fourierserien $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta$

$|\theta| \leq \pi$

Ta $\theta = 0$, där konvergerar Fourierserien mot $f(0) = 0$ enligt sats 2.1.

Alltså $4\sum\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) + \frac{\pi^2}{3} = 0$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ta $\theta = \pi$, där konvergerar fourierserien mot $f(\pi) = \pi^2$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\boxed{2.2.7}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2}$, $b > 0$

$f_{19}(\theta) = e^{b\theta}$ har Fourierserien $\frac{e^{2\pi b} - 1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ni\theta}}{b - in}$

$$\frac{1}{b-in} + \frac{1}{b+in} = \frac{2b}{b^2+n^2}$$

Ta $\theta = 0$, f_{19} är styckvis glatt

Enligt sats 2.1 konvergerar fourierserien i $\theta = 0$

mot $\frac{1}{2}\left[f_{19}(0-) + f_{19}(0+)\right] = \frac{e^{2\pi b} + 1}{2}$

Alltså $\frac{e^{2\pi b}+1}{2} = \frac{e^{2\pi b}-1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-in}$

$$\sum_{n\neq 0} \frac{1}{b-in} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b-in}+\frac{1}{b+in}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2b}{n^2+b^2}$$

$$\frac{e^{2\pi b}+1}{2} = \frac{e^{2\pi b}-1}{2\pi}\left(\frac{1}{b} + 2b\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2+b^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2} = -\frac{1}{4b^2} + \frac{\pi}{b}\underbrace{\frac{e^{2\pi b}+1}{e^{2\pi b}-1}}$$

$$\frac{e^{\pi b}+e^{-\pi b}}{e^{\pi b}-e^{-\pi b}} = \frac{\cosh(\pi b)}{\sinh(\pi b)} = \coth(\pi b)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$\boxed{2.3.2}$ $f_{16}(\theta) = \theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\theta \quad , \quad |\theta| \leq \pi$

(a) visa $\theta^3 - \pi^2\theta = 12\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin n\theta}{n^3} \quad , \quad |\theta|\leq\pi$

Funktionen $f(\theta) = \theta^2 - \frac{\pi^2}{3}$ har medelvärde 0 i $[-\pi,\pi]$ och är (styckvis) kontinuerlig.

$F(\theta) = \theta^3 - \pi^2\theta$ är en primitiv funktion till $3f$ i $|\theta|\leq\pi$

Sats 2.4 ger att F har Fourierserien

$$\frac{c_0}{2} + 12\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(n\theta) \quad , \quad \text{något } c_0 : \frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = 0$$

Är F (periodiserad) kontinuerlig i $\pm\pi$?

$F(\pm\pi) = \pm\pi^3 - (\pm\pi^3) = 0$

Alltså konvergerar Fourierserien för F i $[-\pi, \pi]$

b) Visa $\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$, $|\theta| \leq \pi$

$H(\theta) = \theta^4 - 2\pi^2\theta^2$ är en prim. funktion till 4F i $[-\pi, \pi]$

F är kont. och har medelvärde 0. Sats 2.4 ger att H har en Fourierserie:

$$\frac{\tilde{c}_0}{2} + 48\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos n\theta}{n^4}$$

$$\frac{\tilde{c}_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\theta^4 - 2\pi^2\theta^2)\,d\theta = \frac{7\pi^4}{30}$$

H är jämn, alltså kont. även i $\pm\pi$. Konvergens-satsen för Fourierserier ger resultatet

c) $\underbrace{\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}}_{} = \frac{\pi^4}{90}$ sätt $\theta = \pi$ i (b)

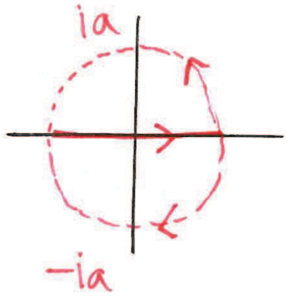
Ex. På Fouriertransformer

$$\mathcal{F} e^{-a|x|}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-ax-ix\xi}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax-ix\xi}\,dx, \quad a>0$$

$$= \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

$$\mathcal{F}\frac{1}{a^2+x^2}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{a^2+x^2}\,dx$$

$$|e^{-iz\xi}| = e^{-\mathrm{Re}(iz\xi)} = e^{\xi\,\mathrm{Im}\,z}$$



Välj $\xi > 0$

$$\int \frac{e^{-iz\xi}}{a^2+z^2}\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f$$

Residyn i $-ia$ är $\dfrac{e^{-a\xi}}{2(-ia)}$

På halvcirkeln är $|e^{-iz\xi}| \le 1$ och $\left|\dfrac{1}{a^2+z^2}\right| \sim \dfrac{1}{R^2}$

$\Rightarrow \left|\int \dots dz\right| \le$ konst. $\cdot \dfrac{1}{R^2} \cdot \pi R \to 0$ då $R \to +\infty$

$$\underbrace{\mathcal{F}\frac{1}{a^2+x^2}(\xi)} = \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}, \quad \xi > 0$$

$$\int \frac{\cos x\xi - i\sin x\xi}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{\cos x\xi}{a^2+x^2}\,dx$$ jämn fkn. av ξ

Resultat: $\frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$

$\boxed{2.3.5}$ $e^{\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$, $\theta < \pi$ f_{18}

Derivera! $e^{\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} inc_n e^{in\theta}$? Nej ty ej konst.

$\boxed{2.3.3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4}$

$f_{17}(\theta) = \theta(\pi - |\theta|) = \frac{8}{\pi} \sum \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^3}$

f_{17} är konst. och har medelvärde 0 {udda funktion}

Sats 2.4 ger att den primitiva funktionen

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f_{17}(\theta')\,d\theta'$$

har Fourierserie: $\frac{c_0}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^4}$

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\theta)\,d\theta$$

Räkna ut $F(\theta)$ för $0 < \theta < \pi$ och beräkna $\int_0^{\pi} F$

Får $\frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2}\theta^2 - \frac{|\theta|^3}{3} = F(\theta)$, $|\theta| \leq \pi$