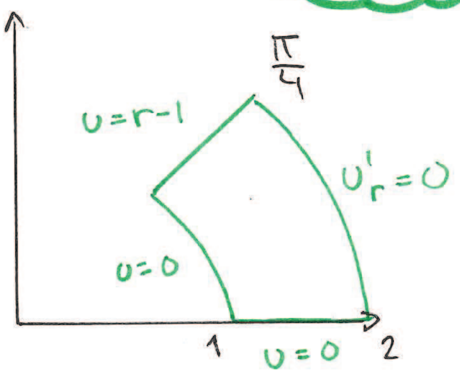
Ons Lv 7

Eö 30

$\Delta u = 0 \quad , \quad u = u(r,\theta)$

$u = R(r)\,\Theta(\theta)$



$$R(r) = \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\ln r\right)$$

$$\Theta(\theta) = \sinh\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\theta\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ansätt $\quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\theta\right)\sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\ln r\right)$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \sum a_n \underbrace{\sinh\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\frac{\pi}{4}\right)}_{>0}\sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\ln r\right)$$

$$= r-1 \quad (1 < r < 2)$$

utveckla $r-1$ i $\sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\ln r\right)$-serie

$\sin(\ldots)$ är lösning till

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \quad \text{med} \quad \lambda = -\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2}\right)^2$$

och randvillkoren $R(1) = 0 \quad , \quad R'(2) = 0$

SL: $\quad (rR')' + \lambda\,\omega(r)\,R = 0 \qquad \omega(r) = \frac{1}{r}$

R är egenfunktionerna till ett SL-problem i $[1,2]$ som är reguljärt. Alltså är egenfunktionerna ortogonala i $L^2_\omega[1,2]$

{ obs! Fullständigt ortogonal system enligt huvudsatsen }

Alltså kan vi utveckla

$$r - 1 = \sum_{1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2} \ln r\right)$$

där

$$c_n = \frac{1}{\| \sin(\ldots) \|_w^2} \underbrace{\int_1^2 (r-1) \sin(\ldots) \frac{1}{r} \, dr}_{I}$$

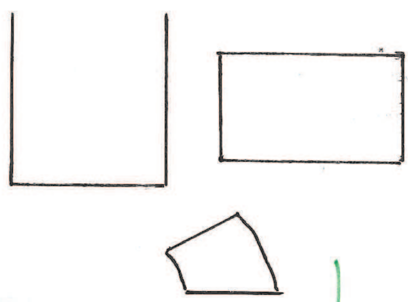
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sätt } s = \ln r \\ \frac{dr}{r} = ds \end{array} \right\} \Longrightarrow I = \int_0^{\ln 2} (e^s - 1) \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2} s\right) ds$$

Alt. 1: $\mathrm{Im}\left[\exp\left(s + i \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2} s\right)\right]$

Alt. 2: Partiell integration

$$e^s - 1 = \sum c_n \sin\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{\ln 2} s\right)$$

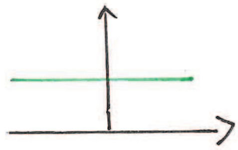
Variabel-separation

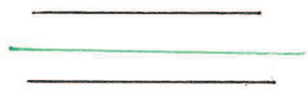


Då man har begränsat intervall

$\left\{ \begin{array}{l} \text{om ekv. eller randvillkoret är uppfyllt} \\ \text{för nollfunktionen, så har vi homogena randvillkor} \end{array} \right\}$

Fourier transform

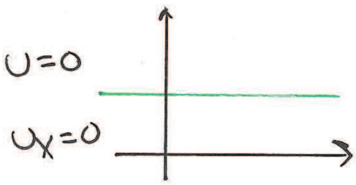




hela $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}_c$ (cosinus-transf.), $\mathcal{F}_s$ (sinus-transf.) $\to$ halvaxel!

eller



Laplacetransform

halvaxel eller kvartsplan

Ekv $u_t = \ldots\ldots$, helst $u=0$ för $t=0$

Ekv. $u_{tt} = \ldots\ldots$, helst u och $u_t = 0$ för $t=0$

EÖ37

$$\min \int_{-\infty}^{+\infty} (x^4 - P(x))^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$$

P pol. grad ≤ 2, $P \in \mathcal{P}_2$ {pol. - polynom}

Sätt $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ för att få vikt e^{-y^2} och Hermite

ska minimera $\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (4y^4 - P(y\sqrt{2}))^2 e^{-y^2} dy$

sätt $P(y\sqrt{2}) = R(y) \, (= P(x))$, $R \in \mathcal{P}_2$

Då är $H_n(y)$ ett fullständigt ortogonalsystem i L^2_w,

$w = w(y) = e^{-y^2}$

H_0, H_1, H_2 är en ortogonalbas i P_2 med vikt w

Enligt satsen om bästa approx. fås minimum då $R(y)$ är proj. av $4y^4$ på P_2

dvs. $R(y) = \sum_0^2 c_n H_n$, $c_n = \frac{1}{\|H_n\|_w^2} \langle 4y^4, H_n \rangle_w$

H_3 är udda så $\langle 4y^4, H_3 \rangle_w = 0$

så $R(y) = \sum_0^3 c_n H_n$ $\{c_n$ samma som innan$\}$

R är proj av $4y^4$ på P_3

Men $H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12$

ges av $H_4(y) = 16y^4 - Q(y)$

och är ortogonalt mot H_0, H_1, H_2, H_3

dvs mot P_3

$Q(y)$ är proj av $16y^4$ på P_3

R, Q är proportionella, liksom $4y^4 - R(y)$ och

$16y^4 - Q(y) = H_4(y)$

$4y^4 - R(y) = \frac{1}{4}(16y^4 - 48y^2 + 12)$

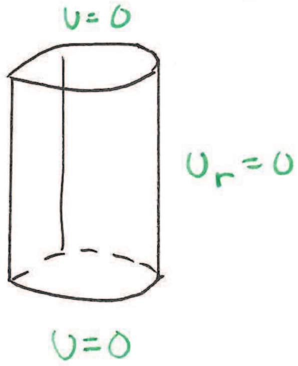
$R(y) = 12y^2 - 3$

$P(x) = R(y) = R\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \ldots$

5.5.71 $u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}\right)$

$t=0$: $u_t(r,\theta,z,0) = 0$

$u(r,\theta,z,0) = ?$



$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)$

$Z(0)=0 \qquad Z(1)=0 \qquad R'(1)=0 \qquad T'(0)=0$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = \lambda$$

$$T'' = c^2\lambda T$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} - \lambda = -\frac{Z''}{Z} = \lambda'$$

$\lambda' = (m\pi)^2$, $\quad Z(z) = \sin m\pi z$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - (\lambda + m^2\pi^2)r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda''$$

$\lambda'' = n^2$, $\quad n = \{0,1,2,\dots\}$

$\Theta(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta$

$$r^2R'' + rR' - \left((\lambda + m^2\pi^2)r^2 + n^2\right)R = 0$$

$R'(1) = 0$

Fall 1: $\lambda + m^2\pi^2 > 0$

säg $\lambda + m^2\pi^2 = \mu^2$ mod. Bessels ekv.

Lösn. $R(r) = c\,I_n(\mu r) + d\,K_n(\mu r)$

$d = 0$ ty K_n sing. i 0, $c = 0$ ty $I_n' > 0$

Fall 2: $\lambda + m^2\pi^2 = 0$

Euler ekv. $R = r^\gamma$ ger $\gamma(\gamma-1) + \gamma \cancel{+} n^2 = 0$

$\gamma = \pm n$ $\quad n \neq 0$: $R(r) = cr^n + dr^{-n}$

$d = 0$ pga $r = 0$, sen $c = 0$ Inga lösn.

$n = 0$: $R(r) = c + d\ln r$

$d = 0$ $\quad R(r) = 1$ är en lösning

För $\lambda = -m^2\pi^2$, $n = 0$ får vi en sep. lösn.

$$1 \cdot 1 \cdot \sin m\pi z \cos c\sqrt{-\lambda}\, t = \sin m\pi z \cos cm\pi t$$

Fall 3: $\lambda + m^2\pi^2 < 0$ $\quad \lambda + m^2\pi^2 = -\mu^2$

Bessels ekv. $R(r) = c' J_n(\mu r) + d\,Y_n(\mu r)$

$d = 0$ pga $r = 0$, $R(r) = J_n(\mu r)$

$R'(1) = 0$ $\quad J_n'(\mu) = 0$

$\mu = \tilde{\lambda}_{kn}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$ nollst. till J_n'

$$\lambda = -\mu^2 - m^2\pi^2 = -(\tilde{\lambda}_{kn}^2 + m^2\pi^2)$$

$$T = \cos c\sqrt{\tilde{\lambda}_{kn}^2 + m^2\pi^2}\, t$$

Resultat

Sep. lösn. är

$$J_n(\mu r)(a\cos n\theta + b\sin n\theta)\sin m\pi z\, \cos c\sqrt{\tilde{\lambda}_{kn}^2 + m^2\pi^2}\, t$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} a = a_{kmn}, & b = b_{kmn} & \\ k = 1, 2, \dots & m = 1, 2, \dots & n = 0, 1, \dots \end{array} \right\}$$

samt

$$\sin m\pi z \cos m\pi c t \qquad m = 1, 2, \dots$$