Mån LV1

Fourieranalys

Värmeledningsekvationen

$u = u(x,t)$ där $0 \leq x \leq L$ och $t \geq 0$

$u_t = k u_{xx}$ k = konstant, $k > 0$

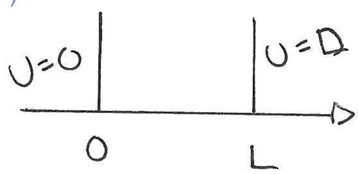
Ekv. beskriver hur värmen rör sig i t.ex. ett rör av längd L som är isolerad i åtminstone sidorna

dvs det är ett endimensionellt problem!

Randvillkor (RV)

$u(0,t) = 0$

$u(L,t) = 0$



Begynnelsevillkor / initialvillkor (IV)

$u(x,0) = f(x)$ där $0 < x < L$

Måste börja med endimensionella problem ty det är det enklaste fallet

Lösning

Sök först separerade lösningar $u(x,t) = X(x)T(t)$ till PDE som dessutom satisfierar RV (glöm IV)

Ekvationen blir $X(x)T'(t) = k X''(x)T(t)$

Detta kan skrivas som

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$ Konstant!

Vi ser att likheten är konstant ty vi kan flytta oss mellan olika punkter utan att värdet ändras.

Låt $\lambda = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$

För T fås: $T'(t) = \lambda k T(t)$

$T(t) = C_0 \exp(\lambda k t)$

$X''(x) = \lambda X(x)$ RV ger $\{ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \}$

$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0$

Kar. ekv.: $r^2 - \lambda = 0$

Lösn: $r = \pm\sqrt{\lambda}$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $\lambda > 0$

$X(x) = a\exp(x\sqrt{\lambda}) + b\exp(-x\sqrt{\lambda})$

RV: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

$X(x) = a\left[\exp(x\sqrt{\lambda}) - \exp(-x\sqrt{\lambda})\right]$

$X(L) = 0$ ger $a\left(\underbrace{\exp(x\sqrt{\lambda} - \exp(-x\sqrt{\lambda}))}_{>0}\right) = 0$

$\Rightarrow a = 0$

Alltså, <u>ingen lösning för $\lambda > 0$</u>

Fall 2 $\lambda = 0$

$\mathbb{X}''(x) = 0$, $\mathbb{X}(x) = ax + b$

Får $a = b = 0$

{Analogi med fall 1} $\Rightarrow$ Ingen lösning för $\lambda = 0$

Fall 3 $\lambda < 0$

sätt $\lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$

$\mathbb{X}''(x) + \mu^2 \mathbb{X}(x) = 0$

Den kar. ekv. har lösningen $r = \pm i\mu$

$$\begin{cases} \mathbb{X}(x) = a' \exp(i\mu x) + b' \exp(-i\mu x) \\ \mathbb{X}(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x) \end{cases}$$

$\mathbb{X}(0) = 0$ ger $a = 0$ {ty $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$}

$\mathbb{X}(L) = 0$ ger $\underbrace{b}_{\neq 0} \underbrace{\sin(\mu L)}_{= 0} = 0$

$\sin \mu L = n\pi$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\Rightarrow$ $\mu = \frac{n\pi}{L}$

$\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ enligt definition

Separerad lösning

$u = b \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot c_0 \exp\left[-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$

eller

$u = c \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \exp\left[-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$

IV: $C\sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x)$?

Även en summa $\sum_n b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \exp[-k(\frac{n\pi}{L})^2 t]$

satisfierar PDE:n och RV. pga linjäritet

Kan en sådan summa satisfiera IV?

$\rightarrow$ Ja, om $\sum_n b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$

Fourier påstod att varje f kan skrivas som en sådan
summa: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$ där $0 < x < L$

Dessa summor kallas Fourierserier

I så fall är $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \exp[-k(\frac{n\pi}{L})^2 t]$

lösningen till hela problemet.

Variant

RV: $\left.\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(L,t) &= 0 \end{aligned}\right\} t > 0$

Precis som innan, T blir som nyss.

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $\lambda > 0$

$X'(x) = a\sqrt{\lambda}\exp(x\sqrt{\lambda}) - b\sqrt{\lambda}\exp(-x\sqrt{\lambda})$

$X'(0) = 0$ ger $(a-b)\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow a = b$

$\rightarrow X(x) = a\sqrt{\lambda}\underbrace{[\exp(x\sqrt{\lambda}) - \exp(-x\sqrt{\lambda})]}_{>0 \text{ för } X(L)}$

Fall 2 $\lambda = 0$

$$\mathrm{X}(x) = ax + b$$
$$\mathrm{X}'(x) = a$$

RV medför att $a = 0 \longrightarrow \mathrm{X}(x) = b =$ konstant.

separabel lösning: $u(x,t) = 1$

Fall 3 $\lambda < 0$

$\lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0 \Longrightarrow \mathrm{X}(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x$

$\mathrm{X}'(x) = -a\mu\sin\mu x + b\cos\mu x$

$\mathrm{X}'(0) = 0$ ger $b\mu = 0 \longrightarrow b = 0$

$\mathrm{X}'(L) = 0$ ger $a\mu\sin\mu L = 0 \longrightarrow \mu = \frac{n\pi}{L}$

separabel lösning: $\cos(\frac{n\pi}{L}x) \cdot \exp[-k(\frac{n\pi}{L})^2 t]$

för $n=0$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$

IV: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x = f(x)$

Då ges lösningen av: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \exp[-k(\frac{n\pi}{L})^2 t]$

Variant

Tag istället en cirkelring: θ ist. för x, $\theta \in \mathbb{R}$

$u = u(\theta, t)$ sägs vara 2π-periodisk i θ

(PDE) $u_t = k u_{\theta\theta}$

IV: $u(\theta, 0) = f(\theta)$

Sök separabla lösningar: $u = \Theta(\theta) T(t)$

T som förut

$\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$

$\boxed{\text{Fall 1}}$ $\lambda > 0$

$\Theta(\theta) = a\exp(\theta\sqrt{\lambda}) + b\exp(-\theta\sqrt{\lambda})$

$\rightarrow$ kan ej vara periodisk $\therefore$ $\rightarrow$ inga lösningar

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $\lambda = 0$

$\Theta(\theta) = a\theta + b \rightarrow a = 0$

$\Theta(\theta) = 1$ dugor

$\boxed{\text{Fall 3}}$ $\lambda < 0$

Låter $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$\Theta(\theta) = a\cos\mu\theta + b\sin\mu\theta$

2π-periodisk omm $\mu \in \{1, 2, 3, \dots\}$, ej annars!

~~separabel lösning:~~ $\cancel{(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\exp(-kn^2t)}$

~~där~~ $\cancel{n = 1, 2, 3, \dots}$

separabel lösning:

$$\begin{cases} (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)(\exp(-kn^2t)) & \text{om } n = 1, 2, 3, \dots \\ 1 & \text{om } n = 0 \end{cases}$$

IV: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = f(x)$

där f är 2π-periodisk.