Mån LV1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad 0 < x < L$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad 0 < x < L$$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Kap 2: Fourier serier

Antag f en reell- eller komplexvärd funktion och dessutom 2π-periodisk

Vill utveckla $f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$

eller: $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \exp(in\theta)$ helt ekvivalent!

$$c_n \exp(in\theta) + c_{-n}\exp(-in\theta) = (c_n + c_{-n})\cos n\theta + i(c_n - c_{-n})\sin n\theta$$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \text{gäller } \forall n \geq 0$$

$\frac{a_0}{2} = c_0$ för $n = 0$

Får $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $n \geq 0$

$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $n \geq 0$

Bestäm c_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \overbrace{\overline{e^{ik\theta}}}^{\text{komplex konjugat}}\, d\theta$$

{kan betraktas som skalärprodukt av $e^{in\theta}$ och $e^{ik\theta}$}

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = \frac{1}{i(n-k)}\left[e^{i(n-k)\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{i(n-k)}\left(e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}\right) = \frac{1}{i(n-k)}\left(\underbrace{(-1)}_{e^{i\pi}=-1}{}^{n-k} - (-1)^{-(n-k)}\right)$$

$= 0$ då $n \neq k$, n och k är heltal

Om $n = k$: $$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|e^{in\theta}|^2}_{=1}\, d\theta = 2\pi$$ ($|e^{i\theta}| = 1$, komplex analys)

Om $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ så bör

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-ik\theta}\, d\theta = c_k \cdot 2\pi$$

dvs. $$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta$$

Därmed:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(e^{-in\theta} + e^{in\theta}\right) d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$b_n = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(e^{-in\theta} - e^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$

Komihåg att

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Om f är 2π-periodisk och Riemannintegrabel definieras c_n, a_n och b_n på detta sättet och kallas **Fourierkoefficienterna** för f

{Obs! Den nollte termen $(n=0)$ som är c_0 resp $\frac{a_0}{2}$ alltid är **medelvärdet** av f i en period}

specialfall: Om f är jämn blir $b_n = 0 \ \forall n$

och $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta \quad n = 0, 1, \ldots$

om f är udda blir $a_n = 0$ och $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$

Konvergens?

Ex. $f_2(\theta) = |\theta| \quad |\theta| \leq \pi$, 2π-periodisk, jämn

så $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\theta| \cos n\theta \, d\theta =$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\theta \frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin n\theta}{n} d\theta\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[\frac{\cos n\theta}{n^2}\right]_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\cancel{\theta} - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ jämt}, \ n \neq 0 \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}, & n \text{ udda} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta \, d\theta = \pi$$

f_2 har Fourierserien $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\theta$

n udda!

Låt $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta$$

Ex. $f_1(\theta) = \theta$, $|\theta| < \pi$, udda

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta \sin n\theta \, d\theta = \dots = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

f_1 har en Fourierserie $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta$

Ex. $f_6(\theta) = \operatorname{sgn}\theta = \begin{cases} +1, & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$ 2π-periodisk

Får $b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämn} \end{cases}$

Fourierserie: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}$

Hur små är koeff.?

Sats (Bessels olikhet)

Antag f är 2π-periodisk och Riemannintegrabel i $[-\pi, \pi]$

Då är $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$

Bevis

$$0 \leq \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right|^2 = \left(f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\theta n} \right)\left(\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c}_n e^{in\theta} \right)$$

$$= |f(\theta)|^2 - \sum_{-N}^{N} \overline{c}_n f(\theta) e^{-in\theta} - \sum_{-N}^{N} c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} +$$

$$+ \sum_{n=-N}^{N} \sum_{n'=-N}^{N} c_n \overline{c}_{n'} e^{in\theta} e^{-in'\theta}$$

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\ldots|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{-N}^{N} \overline{c}_n \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta -$$

$$\underbrace{- \sum_{-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)} e^{in\theta} d\theta}_{= \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta} = 2\pi \cdot \overline{c}_n} + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \sum_{n'=-N}^{N} c_n \overline{c}_{n'} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta}_{= \sum_{-N}^{N} 2\pi |c_n|^2}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - 2\pi \sum_{-N}^{N} |c_n|^2$$

$$\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

Låt $N \to \infty$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

Får $|a_n|^2+|b_n|^2 = |c_n + c_{-n}|^2 + |c_n - c_{-n}|^2 =$

$= 2|c_n|^2 + 2|c_{-n}|^2$ för $n>0$

Om ~~aa~~ $n=0$

$\cancel{\left|\frac{a_0}{2}\right|^2 +}$

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

Cor. 2.1 : Riemann-Lebesgues lemma

$a_n, b_n, c_n \to 0$ då $|n| \to \infty$ om f är som i Bessels olikhet.

Konvergens

En funktion definierad i intervallet $[a,b]$ kallas styckvis kontinuerlig om f är kontinuerlig i $[a,b]$ utom ev. i ändligt många punkter $x_1, \dots, x_k \in [a,b]$ och f har ändliga vänster och högergränsvärden $f(x_j-)$ resp. $f(x_j+)$ i varje x_j.