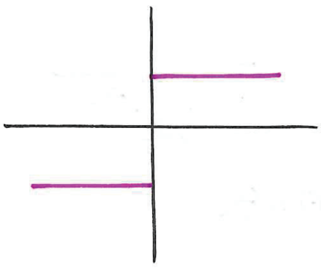
Konvergens för Fourierserier

Ons LV1

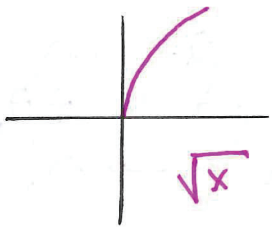
Def. f definierad i $[a,b]$ kallas **styckvis kontinuerlig** om f är kontinuerlig, utom i punkter $x_1, \dots, x_k$ där f har ändliga höger- och vänster gränsvärden.

f kallas **styckvis glatt** i $[a,b]$ om f och f' båda är styckvis kontinuerliga

Ex.



Mot ex.



styckvis kont. men ej styckvis glatt

Konvergerar Fourierserien mot f i varje punkt?

sätt $$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$S_N^f(\theta) \to f(\theta) \,?$$

Sats 2.1

Antag f är 2π-periodisk och styckvis glatt i $[-\pi, \pi]$. Då ~~konf~~ konvergerar $S_N^f(\theta)$ i varje θ. Gränsvärdet är $f(\theta)$ om f är kontinuerlig i θ, annars $\frac{1}{2}(f(\theta-) + f(\theta+))$ (medelvärdet av höger och vänstergränsvärdet)

Bevis i kontinuitetspunkt θ_0:

Sätt $g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(\theta_0)}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$

Utanför punkten θ_0 är g styckvis glatt

Vid θ_0:

$$g(\theta) = \underbrace{\frac{f(\theta) - f(\theta_0)}{\theta - \theta_0}}_{\substack{\text{har vä- och}\\ \text{hö-gränsv. } f(\theta_0^{\pm})\\ \text{då } \theta \to \theta_0}} \cdot \underbrace{\frac{\theta - \theta_0}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}}_{\to \frac{1}{\frac{d}{d\theta} e^{i\theta}\big|_{\theta=\theta_0}} = \frac{1}{ie^{i\theta_0}}}$$

Alltså är g styckvis kontinuerlig i hela intervallet

g är 2π-periodisk och Riemann-integrabel

$\to$ Bessels olikhet ger att $c_n(g) \to 0$, $n \to \pm\infty$

$$f(\theta) = e^{i\theta} g(\theta) - e^{i\theta_0} g(\theta_0) + f(\theta_0)$$

$$c_n(f) = c_{n-1}(g) - e^{i\theta_0} c_n(g) + \begin{cases} f(\theta_0) & \text{om } n=0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int e^{i\theta} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int g(\theta) e^{-in\theta + \theta} d\theta = c_{n-1}(g) \right]$$

$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g) e^{in\theta} - e^{in\theta_0} \sum_{n=-N}^{N} c_n(g) e^{in\theta} + f(\theta_0)$$

$$S_N^f(\theta_0) = f(\theta_0) + \sum_{\underbrace{n=-N}_{n'=n-1}}^{N} c_{n-1}(g)e^{in\theta_0} - \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} c_n(g)e^{i(n+1)\theta_0}}$$

$$\sum_{n'=-N-1}^{N-1} c_{n'}(g)e^{i(n'+1)\theta_0}$$

$$\Rightarrow S_N^f(\theta_0) = f(\theta_0) + c_{-N-1}(g)e^{-iN\theta_0} - c_N(g)e^{i(N+1)\theta_0}$$

$\rightarrow$ går mot $f(\theta_0)$ då $N \rightarrow +\infty$

$\boxed{2}$

Derivering av Fourierserier

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} \overset{?}{\longrightarrow} f'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n e^{in\theta}$$

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \longrightarrow ?$$

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin n\theta + nb_n \cos \theta n)$$

dvs. $c_n(f') \overset{?}{=} inc_n$

$$\begin{cases} a_n(f') \overset{?}{=} nb_n(f) \\ b_n(f') \overset{?}{=} -na_n(f) \end{cases}$$

Sats 2.2

Om f är 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig, så gäller ovanstående dvs fourierserien för f kan deriveras termvis.

Ex. $f_2(x) = |x|, \quad |x| \leq \pi$

$$f_2(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos(2k-1)\theta}{(2k-1)^2}$$

$$f_2'(\theta) = f_6(\theta) = \operatorname{sgn}\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi$$

$$f_6(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\theta$$

$$f_6'(\theta) = 0 \quad \text{för} \quad 0 < |\theta| < \pi$$

Bevis

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta \quad \text{där} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

$a = -\pi, \; b = \pi$

är diskontinuitetspunkterna.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \sum \left[f(\theta) e^{-in\theta} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{2\pi} \sum_{1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(\theta) \, in e^{-in\theta} \, d\theta$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left[f(\theta) e^{-in\theta} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta}_{in\, c_n(f)}$$

$\blacksquare$

Integrering av Fourier serier

Termvis integration! Pss som deriveringen tidigare.

$c_0\theta$ ej periodisk

{ Låt f vara 2π-periodisk. När blir en primitiv funktion F till f periodisk? }

Svar: omm $\int_{-\pi}^{\pi} f \, d\theta = 0$ dvs $c_0 \equiv 0$

Sats 2.4

Antag f 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig med Fourierserien:

$$\sum c_n e^{in\theta} \quad \text{där } c_0 \equiv 0$$

Om F är en primitiv funktion till f har F Fourierserien:

$$C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta}$$ för någon konst. C_0

C_0 kan vara $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$!

Bevis

F är styckvis glatt och kontinuerlig och $F' = f$

Om F har Fourierkoeff. C_n, $n \in \mathbb{Z}$ ger satsen ovan (2.2) att $c_n = in C_n$, $n \neq 0$

Villkoret $\sum |c_n| < \infty$

Antag f 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig.

Då:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|} |nc_n| \leq$$

$$\leq |c_0| + \sqrt{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n\neq 0} |nc_n|^2}$$

enligt Cauchy-Schwarz olikhet!

$$\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum_{n\neq 0} |nc_n|^2 = \sum_{n\neq 0} |inc_n|^2 = \sum_{n\neq 0} |c_n(f')|^2 < \infty$$

enligt Bessels olikhet!

Alltså, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$

Antag nu $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$, $c_n = c_n(f)$

Får $f(\theta) - S_N^f(\theta) = \sum_{|n|>N} c_n e^{in\theta}$

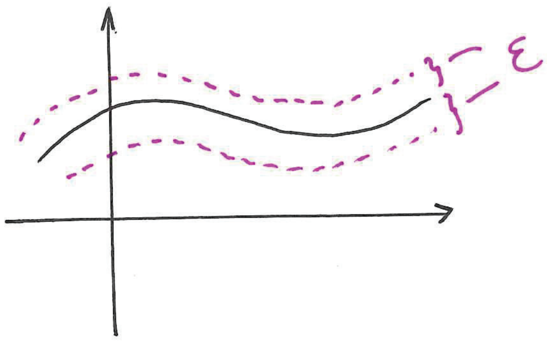
$$|f(\theta) - S_N^f(\theta)| \leq \sum_{|n|>N} |c_n e^{in\theta}| = \sum_{|n|>N} |c_n| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty$$

$$\sup_{|\theta|\leq\pi} |f(\theta) - S_N^f(\theta)| \leq \sum_{|n|>N} |c_n| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty$$

dvs. S_N^f konvergerar likformigt mot f i $[-\pi, \pi]$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 > 0$ s.a. $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$

$$|f(\theta) - S_N^f(\theta)| < \varepsilon \quad \text{för} \quad N > N_0$$



Sammanfatta

Sats 2.5

Om f 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig så gäller

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty$$

och Fourier serien för f konvergerar likformigt och absolut mot f i $[-\pi, \pi]$