Ons LV2

Fouriers Inversionsformel

Ta $f \in L^1(\mathbb{R})$, utveckla f i Fourierserie i $[-L, L]$ (L stort):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

där $$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \approx \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2L}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$\longrightarrow \quad f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2L}}_{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{L}} \hat{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi \quad \text{om } \hat{f} \in L^1$$

Jämför: $f \in \chi_{(-a,a)}$, $\hat{f}(\xi) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi} \notin L^1$

Visa inversionsformeln: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\,d\xi$

Försök: $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\xi}\,dy\, e^{i\xi x}\,d\xi = \int f(y) \int e^{i(x-y)\xi}\,d\xi\,dy$$

$\longrightarrow$ FEL!

Bättre: Anta $f \in L^1$ är styckvis kontinuerlig.

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\iint f(y) e^{-iy\xi}\, dy\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int f(y) \underbrace{\int e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{-i(y-x)\xi}\, d\xi}_{= \text{Fourier transf. av } e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} \text{ i punkten } y-x}\, dy$$

$$\left[\ \widehat{e^{-\frac{ax^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2a}}\ \right] \longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(y) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^2\right) dy = f * \phi_\varepsilon(x)$$

faltning!

$$\left\{ \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \right\}$$

$$\longrightarrow \phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \ ; \ \phi \text{ kont.}, \ \int \phi(t)\, dt = 1$$

Sats 7.3 ger: $f * \phi_\varepsilon(x) \to f(x)$ om f är kont. i x.

$$f * \phi_\varepsilon(x) \to \frac{1}{2}\left[f(x-) + f(x+)\right]$$

om f har språng i x.

Sats: Fouriers inversionsformel

Antag $f \in L^1$, styckvis kontinuerlig

(a) Då $\varepsilon \to 0$ konvergerar

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\exp\left(\frac{-\varepsilon^2\xi^2}{2}\right)e^{ix\xi}\,d\xi$$

mot $f(x)$ i kontinuitets punkter ~~mot~~

mot $\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$ i språng punkter

Har visat (a) hittills!

(b) Om dessutom $\hat{f} \in L^1$ så är

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = f(x) \quad \forall\, x$$

och f är kontinuerlig om f ges värdet

$$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)] \quad \text{i språngpunkter}$$

Bevis

(b) Låt $\varepsilon \to 0$ i integralen I (se föregående)

Dominerande konvergenssatsen (s. 83)

Antag $h_n \in L^1$, $h_n(x) \to h(x)$ $\forall\, x$, $h \in L^1$

Om det finns en funktion $M \in L^1$ s.a.

$|h_n(x)| \leq M(x) \quad \forall x$ så gäller

$$\int h_n(x)\,dx \to \int h(x)\,dx, \quad n \to \infty$$

samma för familj h_ε, $\varepsilon \to 0$

t.ex. $h_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}\right)e^{ix\xi} \to \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}$

~~I~~ Ta $M(\xi) = |\hat{f}(\xi)| \in L^1$.

Får formeln, ty:

$I \to \int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$ och $I \to f(x)$ $\boxed{}$

Inversionssatsen kan skrivas

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f(-x)$$

får: $\hat{\hat{f}}(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = 2\pi\,\underbrace{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}}_{=f}f(-x) = 2\pi f(-x)$

Sats 7.5 (e)

om $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1$ så är

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$$

Bevis

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{g})(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})(-x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)\,\hat{\hat{g}}(-x) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f(x)\,2\pi\, g(x) =$$

$$= 2\pi f(x) g(x)$$

Ta $\mathcal{F}$: $\hat{f} * \hat{g}(x) = 2\pi\,\widehat{fg}(x)$

Fouriertransf. på L^2

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}$$

norm $\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2}$

skalärprodukt $\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$

$f, g \in L^2$ $\quad \langle f, f\rangle = \|f\|^2$

Cauchy-Schwarz olikhet

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|g\|\,\|f\|$$

Triangelolikheten

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Anta $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1$, styckvis kontinuerlig.
Då är alla fyra begränsade och kontinuerliga
därmed i L^2 ty

$$\int |f(x)|^2 dx \leq \sup_x |f(x)| \int |f(x)| dx < \infty$$

Då:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx = \int f(x) \cdot \overline{\int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi} \, dx =$$

$$= \int f(x) \int \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi dx = \int \overline{\hat{g}(\xi)} \int f(x) e^{-ix\xi} dx d\xi =$$

$$= \int \overline{\hat{g}(\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$ Plancherels formel

Speciellt: $\|f\| = \|\hat{f}\|$

Plancherels Sats

Fouriertransformen kan utvidgas till en bijektion

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

med invers: $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} f(-x)$

Man har $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ och $\|\hat{f}\| = \|f\| \quad \forall f \in L^2$

Ex. $\frac{\sin ax}{x} \in L^2$, inte i L^1

Vad är dess Fouriertransform?

Vet $\frac{\sin ax}{x} = \frac{1}{2} \mathcal{F} \chi_{(-a,a)}$

$$\mathcal{F} \frac{\sin ax}{x}(\xi) = 2\pi \mathcal{F}^{-1} \frac{\sin ax}{x}(-\xi) =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \chi_{(-a,a)}(-\xi) = \pi \chi_{(-a,a)}(\xi)$$

$$\mathcal{F} \frac{\sin ax}{x} = \pi \chi_{(-a,a)}$$

Kan också fås som

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin ax}{x} e^{-ix\xi} \, d\cancel{x}$$

Värmeledningsekv. i ett halvplan, $t > 0$

$U_t = k U_{xx}$ $\quad U = U(x,t)$

$U(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Skriv $\hat{U}(\xi, t) = \int U(x,t) e^{-ix\xi} \, dx$

Får $\hat{U}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{U}_t(\xi, 0) = \int \frac{dU}{dt}(x,t) e^{-ix\xi} \, dx = \frac{d}{dt} \int U(x,t) e^{-ix\xi} \, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(x,t)$$

$\Rightarrow$ $\hat{U}_t = (\hat{U})_t = \widehat{U_t}$

$$U_{xx}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{U}(\xi,t)$$

Ekv. blir: $\hat{U}_t(\xi,t) = -k\xi^2 \hat{U}(\xi,t)$

med $\hat{U}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$

För fixt ξ blir $\hat{U}(\xi,t) = c\exp(-k\xi^2 t)$

där $c = c(\xi)$ kan bero av ξ, men ej av t.

Begynnelsevillkoret ger: $\hat{f}(\xi) = c(\xi)$

Alltså: $\hat{U}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\exp(-k\xi^2 t)$

Får $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\underbrace{\exp(-k\xi^2 t)\exp(i\xi x)}_{\text{sep. lösn.}}\,d\xi$

Explicit formel för $u(x,t)$

$e^{-k\xi^2 t} = \mathcal{F}(\text{något})?$, t fixt.

$\widehat{e^{-\frac{ax^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$, ta $a = \frac{1}{2kt}$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\widehat{e^{-\frac{x^2}{4kt}}} = e^{-kt\xi^2}$$

Alltså: $\hat{U}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\widehat{\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)}(\xi) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\widehat{f * \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)}(\xi)$$

Så: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, f * \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int f(y)\exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4kt}\right)dy$$