Poissons ekvation

Fre LV2

$\Delta u = 0 \qquad u(x,y) = u \qquad x \in \mathbb{R},\ y>0$

$u(x,0) = f(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}$

$\hat{u}(\xi, y)$ är Fouriertransformen i x-var.

Får $-\xi^2 \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0$

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$$

För fixt ξ är $\hat{u}(\xi,y) = Ae^{\xi y} + Be^{-\xi y}$

där $A = A(\xi)$, $B = B(\xi)$

Om $\xi > 0$, kasta $e^{\xi y}$ som växer "för snabbt"

dvs sätt $A(\xi) = 0$

om $\xi < 0$, sätt $B(\xi) = 0$

$\longrightarrow \xi > 0 : \hat{u}(\xi,y) = B(\xi)e^{-\xi y}$

$\longrightarrow \xi < 0 : \hat{u}(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y} \Longrightarrow A(\xi) = f(\xi)$

Alla ξ : $\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$

<u>Men</u> $e^{-|\xi|y}$ är, för $y>0$, fouriertransf. av

$$\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Så: $\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) \cdot \frac{1}{\pi} \widehat{\frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\pi} \widehat{f * \frac{y}{x^2+y^2}}(\xi)$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} f * \frac{y}{y^2+x^2} = \frac{1}{\pi} \int f(x-t) \frac{y}{t^2+y^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int f(t) \frac{y}{(x-t)^2+y^2} dt \cancel{= \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}}$$

$\frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}$ kallas Poissons kärna

Ej entydigt $u(x,y) = y$

cos- och sin-transformationer

Om $f \in L^1$ är jämn är

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \underbrace{e^{-ix\xi}}_{\cos x\xi - i\sin \xi} dX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\xi \, dX =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x\xi \, dx \overset{\text{det}}{=} 2 \mathcal{F}_c f(\xi)$$ cosinustransformen

Inversionsformel: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_c f(\xi) e^{ix\xi} dX$

Men! $\mathcal{F}_c f(\xi)$ är jämn vilked ger:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos x\xi \, dX = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_c f(\xi) \cos x\xi \, d\xi$$

Behöver således bara definiera $\mathcal{F}_c f(\xi)$ för $\xi > 0$

Om $f \in L^1$ udda, sätt:

$$\mathcal{F}_s f(\xi) = \int_0^\infty f(x) \sin x\xi \, dx$$

och

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_s f(\xi) \sin x\xi \, d\xi$$

I båda fallen behöver f vara given bara på $\mathbb{R}_+$

Plancherel:

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}_c f(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$\frac{1}{8} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$ samma för $\mathcal{F}_s$

Ex. $u_t = k u_{xx}$

$t > 0$, $x > 0$

sätt $U(\xi, t) = \mathcal{F}_s u(x,t)$, $\xi > 0$

$$\mathcal{F}_s u_{xx}(\xi, t) = \int_0^\infty u_{xx}(x,t) \sin x\xi \, dx =$$

$$= \underbrace{\left[u_x \sin x\xi \right]_0^\infty}_{=0} - \xi \int_0^\infty u_x \cos x\xi \, dx =$$

$$= -\underbrace{\left[u\xi\cos x\xi\right]_0^\infty}_{=0} - \xi^2\int_0^\infty u\sin x\xi\,dx = -\xi^2 U(x,t)$$

Ekv. blir $U_t(\xi,t) = -k\xi^2 U(\xi,t)$

$$U(\xi,0) = \mathcal{F}_s f(\xi)$$

så $U(\xi,t) = C\cdot e^{-k\xi^2 t}$, $C = C(\xi)$

$$C = \mathcal{F}_s f(\xi)$$

Inv. formeln ger:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}_s f(\xi)\, e^{-k\xi^2 t} \sin t\xi\, d\xi$$

Alt. utvidga f till en udda funktion på $\mathbb{R}$,

lös värmeledn. ekv. i halvplanet med f enl. tidigare.

Då blir u udda så att $u(0,t)=0$

Ta restriktionen av u till $x>0$, $t>0$

Diskreta Fourier-transformen

Istället för funktioner har vi ändliga följder

$a = (a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$

I $\mathbb{C}^N$ har vi skalärprodukter $\langle a, b \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \overline{b_n}$

Sök en ortogonalbas bestående av vektorer av typ

$(e^{iqn})_{n=0}^{N-1}$. När är två sådana ortogonala?

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{iqn} e^{-iq'n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(q-q')n} \overset{*}{=}$$

$$\left[\sum_0^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_0^{N-1} r^k = \sum_0^{\infty} \dots - \sum_N^{\infty} \dots = \frac{1}{1-r} - \frac{r^N}{1-r}, \quad r \neq 1 \right]$$

$$\overset{*}{=} \frac{1-e^{i(q-q')N}}{1-e^{i(q-q')}}$$ som är 0 omm $e^{i(q-q')N} = 1$

dvs $e^{i(q-q')} \neq 1$

omm $(q-q')N$ är en multipel av 2π förutsatt att $e^{i(q-q')} \neq 1$

Ta $q = \frac{2\pi}{N} \cdot m$, m heltal, $m = 0, \dots, N-1$

Sätt $e_m = \left(e^{i\frac{2\pi}{N}mn}\right)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$, $m = 0, \dots, N-1$

Då är $e_m \perp e_{m'}$, $m \neq m'$ så e_m är parvis ortogonala, alltså linjärt ortogonala.

De bildar då en bas, ty antalet $= N = \dim \mathbb{C}^N$

Ej ON-bas: $\|e_m\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |e^{i\frac{2\pi}{N}mn}|^2 = N$

Varje $a \in \mathbb{C}^N$ kan utvecklas som

$$a = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e_m \quad \text{och}$$

$$\langle a, e_k \rangle = \sum_0^{N-1} c_m \langle e_m, e_k \rangle = c_k \langle e_k, e_k \rangle = N c_k$$

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{N} \langle a, e_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0} a_n e^{-i\frac{2\pi}{N}mn} \\ a = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \langle a, e_m \rangle e_m \end{cases}$$

Följden $\langle a, e_m \rangle_{m=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ kallas $\hat{a}$ eller den diskreta Fouriertransformen av $a \in \mathbb{C}^N$

skriver $\hat{a}_m = \langle a, e_m \rangle$

Alltså $a = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e_m$ (inversionsformeln)

koordinat nr n: $a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{i\frac{2\pi}{N}mn}$

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}$$

kan utvidga $\hat{a}_m$ och a till N-periodiska följder av $\mathbb{Z}$