Mån LV3

Ortogonalbas i $\mathbb{C}^N$

e_m, $m = 0, \dots, N-1$

$$e_m = \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{N}mn\right)\right)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$$

$\|e_m\| = \frac{1}{\sqrt{N}}$, varje a kan skrivas:

$$\cancel{\hat{a}_N} \quad a = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \langle a, e_m\rangle e_m$$

$$\hat{a}_m = \langle a, e_m\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}mn\right)$$

$\hat{a} = (\hat{a}_m)_{m=0}^{N-1}$ är den diskreta F-transf. av a

$$\longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \exp\left(i\frac{2\pi}{N}mn\right)$$

$$\|a\|^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |a_m|^2 \qquad \text{Parsevals formel}$$

Antag f hygglig funktion på $\mathbb{R}$ med ~~huvudlet~~ huvuddel i $[0, \Omega]$. Då är f nästan bestämd av värdena

$$a_n = f\left(\frac{n}{N}\Omega\right), \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\longrightarrow \quad \hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right) = \int f(x)\exp\left(\frac{-i2\pi m}{\Omega}x\right)dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Omega}{N} f\left(\frac{n}{N}\Omega\right)\exp\left(\frac{-2\pi m i}{\Omega}\frac{n}{m}\Omega\right)$$

$$= \frac{\Omega}{N}\sum_{0}^{N-1} a_n \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}mn\right) = \frac{\Omega}{N}\hat{a}_m$$

Inversionsformeln

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \exp\left(\frac{2\pi i}{N} mn\right) = \frac{N}{\Omega}\cdot\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{N} mn\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{2\pi}{\Omega} m\right)\exp\left[\left(\frac{2\pi i}{\Omega} m\right)\frac{\Omega n}{m}\right] =$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\exp\left(i\xi\frac{\Omega n}{N}\right)d\xi = f\left(\frac{\Omega}{N} n\right) = a_n$$

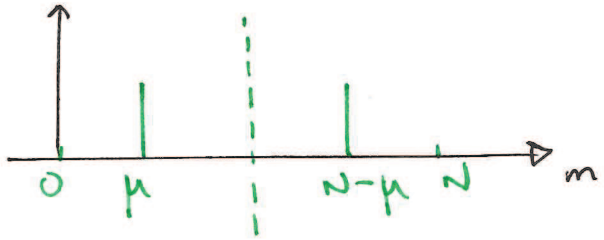
Ex. $f(x) = \cos\lambda x$ med $\lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\cdot\mu$ där $\mu \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\pi}{\Omega}\mu x\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\Omega}\mu x\right)$$

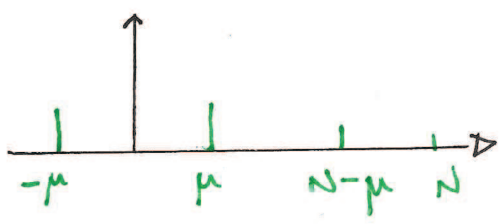
$$a_n = f\left(\frac{n}{N}\Omega\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}n\mu\right)}_{\frac{1}{2}e_\mu} + \underbrace{\frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}n\mu\right)}_{\text{justera periodiskt}} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}n\mu\right) + \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}(N-\mu)n\right)$$

$$\longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{2}e_\mu + \frac{1}{2}e_{N-\mu}$$



om istället $\sin\lambda x$



Snabba Fouriertransformen FFT

$\hat{a}$ kräver N^2 multiplikationer

Det finns en genväg om N är en 2-potens.

Antag $N = 2N_1$

$$\longrightarrow \hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_{2n} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N} m 2n\right) + \sum_{n=0}^{N_1-1} a_{2n+1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{2N_1} m(2k+1)\right)$$

$$\cancel{= \sum a_{n2i} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N_1} mn\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{2N_1}\mu\right]}$$

$$= \sum a_{2n} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N_1} mn\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{2N_1} m\right) \sum a_{2n+1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N_1} mn\right)$$

N_1 istället för N, två fouriertransformer ger:

$$2N_1^2 + \underset{(2N_1)}{N} = \frac{N^2}{2} + N$$

Nästa steg: $N_1 = 2N_2$

$$2\left(\frac{N_1^2}{2} + N_1\right) \longrightarrow N + N\log_2 N \quad \text{om}$$

N är 2^k, något k.

Dynamiska System

Signalbehandling

$f = f(t)$ signal, $\hat{f}$ avger dess frekvenser

Inv. formeln $\longrightarrow$ $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(w)e^{iwt}\,dw$

Energin: $\int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int |\hat{f}(w)|^2 dw$

Def. Ett linjärt, dynamisk system är en linjär avbildning

$$S: \underset{\substack{f(t) \\ \text{insignal}}}{f} \longrightarrow \underset{\substack{g(t) \\ \text{utsignal}}}{g}$$

definierad för lämpliga f. S kallas tidsvariant om

$S: f(t) \longrightarrow g(t)$ medför $f(t-t_0) \longrightarrow g(t-t_0)$

sätt $\tau_a f(t) = f(t-a)$. Tidsvarians betyder

$S\tau_a f = \tau_a S f$ dvs. $S\tau_a = \tau_a S$

Ex. Faltning med fix funktion h ger tidsvar. system:

om $Sf = f * h$ så

$$\underbrace{S\tau_a f(t)} = \tau_a f * h(t) = \int \underbrace{\tau_a f(t-s)}_{=f(t-s-a)} h(s)\,ds =$$

$$= \int f(t-s-a)h(s)\,ds = f*h(t-a) = Sf(t-a) = \underbrace{\tau_a S f(t)}_{\substack{= S\tau_a f(t) \\ \text{enl. def.}}}$$

Obs! Allmänt:

$$f*h(t) = \int f(s)h(t-s)\,ds = \int f(s)\,\tau_s h(t)\,ds$$

$$f*h = \int f(s)\,\tau_s h\,ds$$

'Sats'

Ett linjärt dynamiskt system är tidsinvariant omm det ges av

$$Sf = f*h, \text{ något } h.$$

Bevis av 'endast om'

sätt $h = S\delta$

Faltning: $f = f*\delta = \int f(s)\,\tau_s \delta\,ds$ enligt ovan!

$Sf = S\int f(s)\,\tau_s\delta\,ds$ { Kan approximera integralen som en summa och låta S flyttas in i summan och verka på alla delar }

$$\Longrightarrow Sf = \int f(s)\,S\tau_s\delta\,ds = \int f(s)\,\tau_s S\delta\,ds =$$

$$= f*S\delta = f*h$$

$\boxed{\not{z}}$

$\rightarrow h = S\delta$ kallas impulssvaret

Fouriertransf. : $\widehat{Sf} = \hat{f}\,\hat{h}$

→ $\hat{h}$ kallas systemfunktion { Frequency transfer function i BETA }

$$\hat{h} = \frac{\widehat{Sf}}{\hat{f}}$$

$$Sf(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{h}(\omega)\,\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

→ $\hat{h}(\omega)$ anger hur mycket frekvensen ω förstärks!

Def. Systemet S kallas kausalt om $Sf(t)$ är bestämt av f:s värden i intervallet $(-\infty, t]$.
Eftersom $Sf(t) = \int f(t-s)h(s)\,ds$ betyder detta att $h(s) = 0$ för $s < 0$.

Def. S kallas stabilt om $h \in L^1$.
Det ger kontroll över energin: (kan inte bli större än den var)

$$\|Sf(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{Sf}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{h}\hat{f}\|^2$$

$$\left[\ \sup|\hat{h}| \leq \int |h(t)|\,dt\ \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\|\hat{h}\hat{f}\|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int |h(t)|\,dt\right)^2 \|\hat{f}\|^2 = \left(\int |h(t)|\,dt\right)^2 \|f\|^2$$

Ex. Insignal $e^{i\omega_0 t} = f(t)$ ger utsignal

$$Sf(t) = \int h(s) e^{i\omega_0(t-s)} ds =$$

$$= \int h(s) e^{-i\omega_0 s} ds \, e^{i\omega_0 t} = \underbrace{\hat{h}(\omega_0) e^{i\omega_0 t}}$$

{ Samma som insignalen men förstärkt med faktorn $\hat{h}(\omega_0)$ enligt def. ! }

→ En periodisk insignal $f = \sum c_n e^{int}$ ger utsignalen $Sf = \sum c_n \hat{h}(n) e^{int}$ som också är periodisk

Om h är reellvärd, ger $f(t) = \cos \omega_0 t$ att

$$Sf(t) = h * \cos \omega_0 t = h * \operatorname{Re}(e^{i\omega_0 t}) = \operatorname{Re}(h * e^{i\omega_0 t})$$

som är $e^{i\omega_0 t} * h$ om det råkar vara reellt

Ex. Om insignalen $x(t) = \theta(t) e^{-2t}$

⌜ Heavisidefunktionen $\theta(t) = H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ⌟

ger utsignal $y(t) = \theta(t) e^{-3t}$ så är