Ortogonalsystem (forts.)

Mån LV 4

Plancherel

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

Från förra gången:

$(\varphi)_1^\infty$ ortogonalsystem i L^2

$$c_n(f) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\langle f, \varphi_n\rangle$$

Bessel: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2$

medför att $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n$ konvergerar i L^2

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n = f \quad \text{omm} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2 \qquad (*)$$

Def. ortogonalsystemet $(\varphi_n)_1^\infty$ kallas **fullständigt** eller en **bas** om $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n = f \;\; \forall\, f \in L^2$

Sats 3.4

$(\varphi_n)_1^\infty$ ortogonalsystem i L^2. Då är följande ekvivalent

(a) $(\varphi_n)_1^\infty$ är fullständigt

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in L^2$ {Parsevals ekvation}

(c) om $f \perp \varphi_n \ \forall n$ så är $f = 0$ i L^2

Bevis

(*) ger att (a) är ekvivalent med (b)

Visa (a) $\Rightarrow$ (c):

Om $f \perp \varphi_n \ \forall n$ så är $c_n(f) = 0 \ \forall n$ så

$\sum_1^\infty c_n(f)\varphi_n$ är nollserien!

Men! $\sum c_n(f)\varphi_n = f$ enligt (a) $\rightarrow$ $f = 0$

Visa (c) $\Rightarrow$ (a)

Ta $f \in L^2$. Då konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n$.

Får $\langle f - \sum_1^\infty c_n(f)\varphi_n, \varphi_k \rangle = \langle f, c_k \rangle - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{c_k(f)\|\varphi_k\|^2}$

$= 0$

(c) ger $f - \sum_1^\infty c_n(f)\varphi_n = 0$, dvs (a) $\square$

Sats 2.5

De fyra ortogonalsystemen

1. $(e^{inx})_{n=-\infty}^{+\infty}$

2. $\{\cos nx \,;\, n=0,1,..\} \cup \{\sin nx \,;\, n=1,2,...\}$ i $(-\pi,\pi)$

3. $\{\cos nx \,;\, n=0,1,...\}$

4. $\{\sin nx \,;\, n=1,2,...\}$

$\Big\}$ i $(0,\pi)$

är fullständiga!

Bevis

Ta $f \in L^2(I)$, $I = \begin{cases} (-\pi,\pi) \\ (0,\pi) \end{cases}$

Ta $\varepsilon > 0$. Kan ta $g=0$ nära ändpunkterna till I. Fortsätt g till en 2π-periodisk (jämn eller udda) $C^{(1)}$-funktion. Enligt Sats 2.5 konvergerar $\sum_1^\infty c_n(g)\varphi_n$ likformigt mot g, så

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n(g)\varphi_n - g\right| < \varepsilon \text{ på } I, \text{ för något } N, N \text{ stort}$$

Då:

$$\left\|\sum_1^N c_n(g)\varphi_n - g\right\|^2 = \int \left|\sum_1^N c_n(g)\varphi_n(x) - g(x)\right|^2 dx \leq 2\pi\varepsilon^2$$

Då ger triangelolikheten:

$$\| f - \sum_{1}^{N} c_n(g)\varphi_n \| \leq \| f - g \| + \| g - \sum_{1}^{\infty} c_n(g)\varphi_n \| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \sqrt{2\pi}\,\varepsilon$$

Satsen om bäst approx. medför

$$\| f - \sum_{1}^{N} c_n(f)\varphi_n \| \leq \| f - \sum_{1}^{N} c_n(g)\varphi_n \| \leq (1+\sqrt{2\pi})\,\varepsilon$$

Ta små ε. Ser att:

$$| f - \sum_{1}^{N} c_n(f)\varphi_n | \to 0 \quad \text{då} \quad N \to \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n = f$$

$\square$

Ex. på icke-fullständigt system

$$(\cos nx)_{n=0}^{\infty} \quad \text{i} \quad (-\pi, \pi)$$

om f udda är $f \perp \cos nx \;\; \forall n$

så (c) är falskt.

Alt. Ta bort φ_{n_0} från $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$

Då är $\varphi_{n_0} \perp \varphi_n \;\; \forall n \neq n_0$ så (c) är falskt.

Parseval ger för $f \in L^2(-\pi, \pi)$

$$\sum_{1}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

om $c_n = c_n(f)$ är koeff. för f i systemet (e^{inx})

Motsvarande för cos, ... sin

Även i $(-L, L)$ och $(0, L)$

Sturm - Liouville - problem

Gjorde var-sep. för $\begin{matrix} u_t \\ u_{tt} \end{matrix} = c\, u_{xx}$

Ska ersätta u_{xx} med $r(x)u_{xx} + q(x)u_x + p(x)u$

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{och} \quad \begin{cases} X(0) = 0 = X(L) \\ X'(0) = 0 = X'(L) \end{cases}$$

$$X = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$ egenvärden

$\left.\begin{matrix} \text{egenvektorer} \\ \text{egenfunktioner} \end{matrix}\right\}$ till $\dfrac{d^2}{dx^2}$

Jfr. A symmetrisk matris $\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle$

Då finns bas (v_i) av egenvektorer

$Av_i = \lambda_i v_i$ och $v_i \perp v_j$, $i \neq j$

Är $\frac{d^2}{dx^2}$ en symmetrisk operator?

$$\int_a^b f''(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\overline{g''(x)}\,dx$$

Ja, om inga utintegrerade termer, vilket ska garanteras av randvillkoren!

Sätt $Lf(x) = r(x)f_{xx} + q(x)f_x + p(x)f$

Anta $f, g \in C^{(2)}[a,b]$ är 0 i och nära a och b, $a \leq x \leq b$

$$\langle Lf, g\rangle = \int (rf''\bar{g} + qf'\bar{g} + pf\bar{g})\,dx \overset{P.I.}{=}$$

$$= \int (f(r\bar{g})'' - f(q\bar{g})' + fp\bar{g})\,dx$$

{ r, p, q är reella! }

$$= \int f[(r\bar{g}'') + (2r'-q)\bar{g}' + (r''-q'+p)\bar{g}]\,dx$$

$$\overset{?}{=} \int_a^b f\,\overline{Lg}\,dx$$

; Ja om $2r'-q = q$ och

$r''-q'+p = p$

dvs. $\begin{cases} r' = q \\ r'' = q' \end{cases} \iff r' = q$

I så fall är $Lf = rf'' + r'f' + pf =$

$$= (rf')' + pf$$

Då kallas L formellt självadjungerad

Anta om L formellt självadjungerad och

$f, g \in C^{(2)}[a,b]$ godtyckliga

$$\int_a^b (rf')'\bar{g}\,dx = \left[rf'\bar{g}\right]_a^b - \int_a^b rf'\bar{g}'\,dx =$$

$$= \left[rf'\bar{g}\right]_a^b - \left[fr\bar{g}'\right]_a^b + \underbrace{\int_a^b f(r\bar{g}')'\,dx}_{= \int f\,\overline{(rg')'}\,dx}$$

Addera $\int_a^b pf\bar{g}\,dx$

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle + \Big[r(\underbrace{f'\bar{g} - f\bar{g}'}_{= \begin{vmatrix} f' & f \\ \bar{g}' & \bar{g} \end{vmatrix}})\Big]_a^b$$

Lagranges identitet

~~Lagranges identitet~~

Hitta randvillkor på f, g ~~sat~~ så att $\left[\dots \right]_a^b = 0$

ska ha två randvillkor, både av typ

$$\alpha f(a) + \tilde{\alpha} f'(a) + \beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0$$

där $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ är reella, och ej alla är 0.

kalla dem $B_1(f) = 0$, $B_2(f) = 0$

Def. Dessa randvillkor kallas självadjungerade om

$$\left[r(f'\bar{g} - f\bar{g}') \right]_a^b = 0 \quad \forall\, f, g \text{ som satisfierar}$$

$$B_1(f) = B_1(g) = B_2(f) = B_2(g) = 0$$

Ex. på självadj. randvillkor

Sats separerade randvillkor

dvs av typ. $\alpha f(a) + \tilde{\alpha} f'(a) = 0$ och

$\beta f(b) + \tilde{\beta} f'(b) = 0$ är självadj.

Bevis

I a får vi: $r(a) \begin{vmatrix} f'(a) & f(a) \\ \overline{g'(a)} & \overline{g(a)} \end{vmatrix}$

Anta f, g reella. Då är vektorn $(f(a), f'(a)) \in \mathbb{R}^2$ ortogonal mot $(\alpha, \tilde{\alpha})$, $(g(a), g'(a))$ också.

Då är $(f(a), f'(a))$ och $(g(a), g'(a))$ parallella,

så $\begin{vmatrix} f'(a) & f(a) \\ g'(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0$

om $f, g \in \mathbb{C}$, ta Re- och Im-del separat

$\square$

Även periodiska randvillkor

$f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$

är självadj. om $r(a) = r(b)$ $\{$ex. r är konst.$\}$