Ons Lv4

Förra gången:

Reguljärt Sturm-Liouville-problem i $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$:

→ $Lf = (rf')' + pf$, r, r', p kont., $r>0$ i $[a,b]$

→ självadj. randvillkor $B_1(f)=0$, $B_2(f)=0$

→ en viktsfunktion w kont., positiv i $[a,b]$

λ, f kallas egenvärd resp. egenfunktion om

$$Lf + \lambda w f = 0 \quad , \quad f \in C^{(2)} \quad , \quad f \not\equiv 0$$

och f sat. randvillkoren!

Vet att $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$ om f, g satisfierar randvillkoren.

Sats 3.9

För ett reguljärt S-L-problem gäller:

1. Alla egenvärden är reella
2. om f, g är egenfunktioner med olika egenvärden så är $f \perp g$ i $L^2_w[a,b]$, $\langle f,g \rangle_w = 0$
3. Egenfunktionerna för ett fixt egenvärde bildar ett vektorrum av dimension högst 2 och dim. 1 om randvillkoren är separerade.

Bevis av 1, 2:

Anta f, g är egenfunktioner med egenvärden λ, μ:

$$\lambda \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, w(x)\, dx = -\int_a^b Lf(x)\overline{g(x)}\, dx =$$

$$= -\int_a^b f(x)\overline{Lg(x)}\, dx = \int_a^b f(x)\overline{\mu w(x) g(x)}\, dx =$$

$$= \bar{\mu} \int f(x)\overline{g(x)}\, w(x)\, dx$$

$$(\lambda - \bar{\mu})\langle f, g\rangle_w = 0$$

Ta nu $g = f$, $\mu = \lambda$: $\cancel{\lambda = g}$ $(\lambda - \bar{\lambda})\overbrace{\|f\|_w^2}^{>0} = 0$

$\lambda = \bar{\lambda}$ så 1. följer

Ta sen f, g med $\lambda \neq \mu$:

$$(\lambda - \mu)\langle f, g\rangle_w = 0$$

så $f \perp g$ i L^2_w och 2. följer.

$\square$

Ex. $Lf = f''$ $w = 1$ $[a,b] = [0,L]$

Randvillk.: $f(0) = f(L) = 0$ reg. S-L-problem!

$$X'' + \lambda X = 0$$

vet att egenvärdena är $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$

Egenfunktionerna $\sin \frac{n\pi}{L} x$

Om randvillkoren istället är $f'(0) = f'(L) = 0$

→ ger samma λ samt $\lambda = 0$

egenfunktionen blir: $\cos \frac{n\pi}{L} x$, $n = 0, 1, \ldots$

- - - - - - - - - - -

Samma L i $[-L, L]$, $w = 1$

Periodiska randvillkor dvs:

$f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f(L)$ ger reg. S-L-prob.

Egenfunktioner: 1 $\cos \frac{\pi}{L} x$ $\sin \frac{\pi}{L} x$ $\cos \frac{2\pi}{L} x$ $\sin \frac{2\pi}{L} x$

Egenfunktioner: 0 $\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ $\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$

ortogonalitet följer i $L^2[0,L]$ resp. $L^2[-L,L]$

Huvudsats för reg. S-L-problem (visas ej)

För ett reg. S-L-problem finns egenfunktioner $(\varphi_n)_1^\infty$ som bildar ett fullständigt ortogonalt system i $L^2_w[a,b]$.

För motsvarande egenvärden $(\lambda_n)_1^\infty$ gäller $\lambda_n \to +\infty$ då $n \to \infty$

Om $f \in L^2_w[a,b]$ har man alltså $f = \sum_1^\infty c_n(f)\varphi_n$ med konvergens i $L^2_w[a,b]$ där

$$c_n(f) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_w^2} \langle f, \varphi_n \rangle_w .$$

Om dessutom $f \in C^{(2)}[a,b]$ konvergerar serien likformigt i $[a,b]$

Följd: Kan räkna upp $(\lambda_n)_1^\infty$ i växande ordning

Har högst ändligt många negativa λ_n.

Intuitivt: Om $r(x) = 1$ är ekvationen

$$f'' + pf + \lambda w f = 0$$

dvs: $f'' = Qf$, $Q(x) = -p(x) - \lambda w(x)$

Om λ tillräckligt negativt blir $Q > 0$

dvs: f'', f har samma tecken

Ex. $Lf = f''$, $w = 1$ i $[0, L]$

Randvillkor $f(0) = f'(L) = 0$

$$f'' + \lambda f = 0$$

$\lambda < 0$

sätt $\lambda = -\mu^2$

$\longrightarrow f = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$

RV: ger $a = 0 \longrightarrow f = b \sinh \mu x$

$f' = b\mu \cosh \mu L = 0 \longrightarrow b = 0$

inga lösningar $\longrightarrow$ inga egenvärden $\lambda < 0$

$\lambda = 0$ Nej!

$\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$

$\longrightarrow f = a \cos \mu x + b \sin \mu x$

$f(0) = 0 \longrightarrow a = 0$, $f'(L) = 0 \longrightarrow b\mu \cos \mu L = 0$

$\longrightarrow \mu L = (n - \frac{1}{2})\pi$

$$\lambda_n = \lambda = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots \Big\} \text{ egenvärden!}$$

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L} x \quad \text{egenfunktioner!}$$

Dessa φ_n bildar enligt huvudsatsen ett fullständigt ortogonalsystem i $[0,L]$

Ex. $Lf = f''$, $w = 1$ i $[0,1]$

$f'(0) = f(0)$, $f'(1) = 2f(1)$

Reg. SL-prob.

Finn egenvärdena, egenfunktionerna: Lös $f'' + \lambda f = 0$

1. $\lambda < 0$

sätt $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$f(x) = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$

$f'(x) = a\mu \sinh \mu x + b\mu \cosh \mu x$

$f'(0) = f(0)$ ger $b\mu = a$

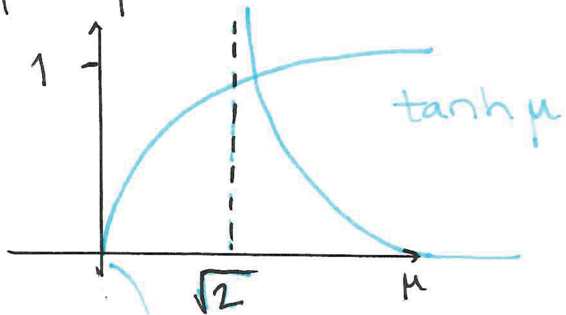
$\rightarrow$ $f(x) = b(\mu \cosh \mu x + \sinh \mu x)$ Kasta b

$f'(x) = \mu^2 \sinh \mu x + \mu \cosh \mu x$

$f'(1) = 2f(1)$ ger $\cancel{\mu^2 \sinh \mu x + \mu \cosh \mu x}$

$\mu^2 \sinh \mu + \mu \cosh \mu = 2\mu \cosh \mu + 2 \sinh \mu$

$(\mu^2 - 2)\tanh \mu = \mu$ $\longrightarrow$ $\tanh \mu = \dfrac{\mu}{\mu^2 - 2}$



$\frac{\mu}{\mu^2-2}$ avtar för $\mu > \sqrt{2}$ ty $\frac{\mu^2-2}{\mu} = \mu - \frac{2}{\mu}$ växer!

Alltså <u>en</u> lösning μ_0

Ett negativt egenvärde $\lambda_0 = -\mu_0^2$

2. $\lambda = 0$

Får ~~λ~~ $f(x) = ax + b$

$f'(0) = f(0)$ ger $a = b$ $\to$ $f(x) = b(x+1)$

Kasta b!

$f'(1) = 2f(1)$ ger $1 = 2(1+1)$ Nej!

0 är således <u>inget</u> egenvärde

3. $\lambda > 0$

Sätt $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$

$f'' + \mu^2 f = 0$ $\to$ $f(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x$

$f'(x) = -a\mu\sin\mu x + b\mu\cos\mu x$

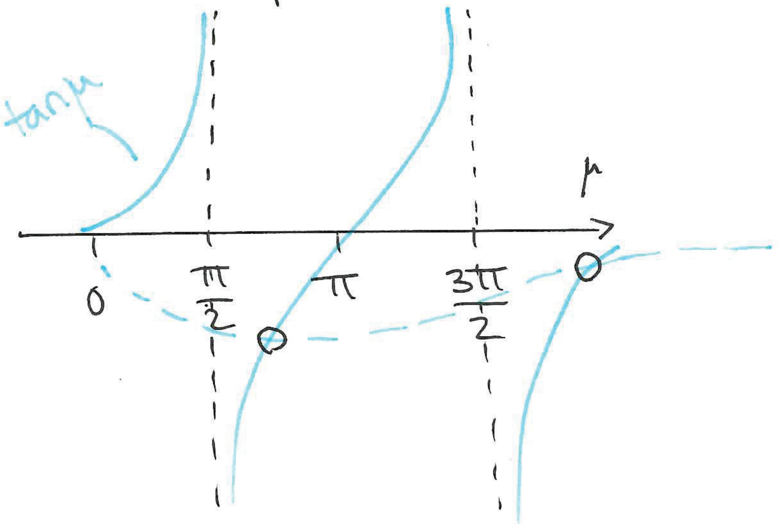
$f'(0) = f(0)$ ger $b\mu = a$

$\to$ $f(x) = b(\mu\cos\mu x + \sin\mu x)$ Kasta b!

$f'(x) = -\mu^2\sin\mu x + \mu\cos\mu x$

$f'(1) = 2f(1)$ ger $-\mu^2\sin\mu + \mu\cos\mu = 2\mu\cos\mu + 2\sin\mu$

$$(\mu^2+2)\tan\mu = -\mu \longrightarrow \tan\mu = \frac{-\mu}{\mu^2+2}$$



en skärningspkt i varje period !!

enligt figuren

Får lösningar $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\pi}{2} < \mu_1 < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < \mu_2 < 2\pi ; \quad \ldots \right\}$$

Får positiva egenvärden

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad n \to \infty$$

Egenfunktioner: $\varphi_0 = \mu_0 \cosh \mu_0 x + \sinh \mu_0 x$

$$\varphi_n = \mu_n \cos \mu_n x + \sin \mu_n x, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Detta är alla egenfunktionerna

Huvudsatsen säger att dessa bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2[0,1]$

Obs! Allt detta gäller för reg. S-L-prob !!