Musikinstrument

Fre LV4

Vågekv. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < L$, $t > 0$

Randvillkor : $u(0,t) = u(L,t) = 0$ sim. Fidsträng

Får $X(x) = \sin \frac{\pi n}{L} x$

RV: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ } simulerar en flöjt eller orgel pipa

I båda fallen har vi

$$T(t) = a \cos \frac{c\pi n}{L} t + b \sin \frac{c\pi n}{L} t$$

Sammanf.:

separerade lösningar ges av:

$$\left(a \cos \frac{c\pi n}{L} t + b \sin \frac{c\pi n}{L} t\right) \begin{cases} \cos \frac{\pi n}{L} x \\ \sin \frac{\pi n}{L} x \end{cases}$$

Frekvenser som hörs: $\frac{1}{2\pi} \frac{c\pi n}{L} = \frac{cn}{2L}$

Grundton $\{n=1\}$: $\frac{c}{2L}$

övertoner $\{n = 2, 3, \dots\} = \frac{c}{2L} \cdot n$ } Heltals multipler av grundtonen!

Randvillk: $u(0,t)=0=u_x(L,t)$

simulerar panflöjt, klarinett, ~~orgelpipa~~ orgeltungpipa

Får $X(x)=\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x$

Sep. lösn.: $\left(a\cos\frac{c\pi(n-\frac{1}{2})}{L}t+b\sin\frac{c\pi(n-\frac{1}{2})}{L}t\right)\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}x$

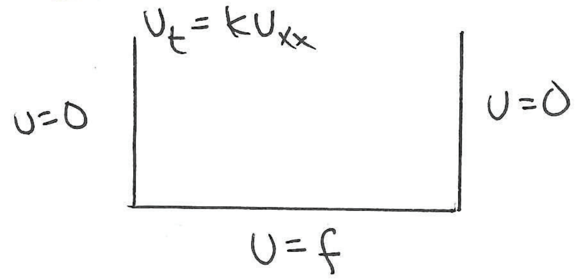
Frekvenser: $\frac{1}{2\pi}\frac{c\pi(n-\frac{1}{2})}{L}=\frac{c(2n-1)}{4L}$

Grundton: $\frac{c}{4L}$

Överton: $\frac{c}{4L}(2n-1)$ $\{n=2,3,\dots\}$

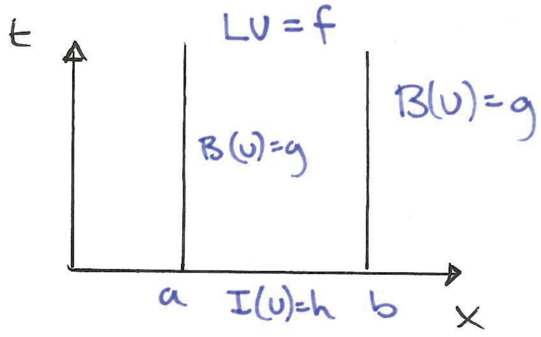
Kap 4 Inhomogena problem

Variabelseparerade



$u_t-ku_{xx}=0$

Problem P



L är t.ex.

$Lu=u_t-ku_{xx}$

eller $u_{tt}-c^2u_{xx}$, osv.

$F=F(x,t)$

→ linjär partiell diff.-operator

Randvillkor $B(u)=g$

är t.ex. $u(a,t)=g_1(t)$

$u(b,t)=g_2(t)$

Initialvillkoret $I(u)=h$

kan vara $u(x,0)=h(x)$

ev. $u_t(x,0)=\tilde{h}(x)$ också

Lösningar

Superposition {teknik 1} - Dela upp problemet

$Lu=f$	$Lu=0$	$Lu=0$
$B(u)=0$	$B(u)=g$	$B(u)=0$
$I(u)=0$	$I(u)=0$	$I(u)=h$
P_L	P_B	P_I

Obs! Om u_L, u_B, u_I löser P_L, P_B resp P_I

så är $u=u_L+u_B+u_I$ en lösning till P!

[Löser P_I med variabelsep., ibland P_B med Laplace]

Steady state {teknik 2}

om F, g är oberoende av t, dvs $F=F(x)$ och

g_1, g_2 är konstanter, ~~Sök~~ sök en funktion $u_0=u_0(x)$

av bara x som löser PDE:n och RV (oftast)

Sök sen en lösning till P av formen

$$u(x,t) = u_0(x) + v(x,t)$$

För v får vi:

$Lu = F$ blir $\overbrace{Lu_0}^{=F} + Lv = F = F(x)$

$\Longrightarrow Lv = 0$

$B(u) = g$ blir $\underbrace{B(u_0)}_{=g} + B(v) = g$

$\Longrightarrow B(v) = 0$

$I(u) = h$ blir $I(u_0) + I(v) = h$

$\Longrightarrow I(v) = h - I(u_0)$

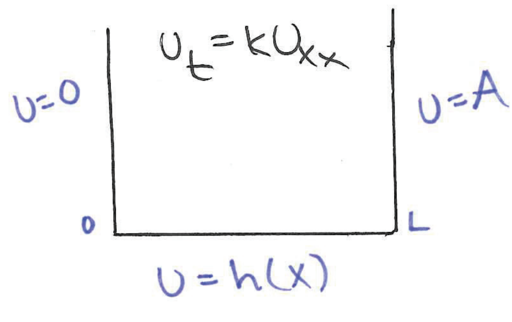
↳ För problem av typ P_I får v variabelseparera; hitta v och sätt $u = u_0 + v$
u löser P!

Ex. $u_t = k u_{xx}$

RV: $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = A$, $\{A$ konst.$\}$

BV: $u(x,0) = h(x)$

Sök steadystate lösning!



PDE:n ~~store~~ ger $0 = k(u_0)_{xx}$

RV : $u_0(0) = 0$, $u_0(L) = A$

Får $u_0(x) = ax + b$ $\{ b = 0 , \; aL = A \}$

$\Rightarrow u_0 = \frac{A}{L} x$

sätt $u(x,t) = \frac{A}{L} x + v(x,t)$

om u löser problemet så fås:

$v_t = k v_{xx}$

$v(0,t) = 0 = v(L,t)$

$v(x,0) = h(x) - \frac{A}{L} x$ P_I, variabelsep.

Variabla koefficienter {teknik 2}

för $P_L + P_I$, alltså $B(u) = 0$.

Tag värmeledningsekv. $u_t - k u_{xx} = F(x,t)$

med $u(0,t) = u(L,t) = 0$ och $u(x,0) = h(x)$

I det homogena fallet $F = 0$ dvs P_I skulle vi variabelseparera och få sep. lösn.

$$\sin \frac{\pi}{L} n x \exp\left(-k \left(\frac{\pi}{L} n\right)^2 t\right)$$

Ansätt nu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

med okända b_n som skall bestämmas.

PDE:n blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin \frac{\pi n}{L} x + k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$= F(x,t)$$

För varje fixt t kan vi utveckla funktionen $x \to F(x,t)$:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad 0 < x < L$$

Får $\sum_{1}^{\infty} \left(b_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t)\right) \sin \frac{n\pi}{L} x = \sum \beta_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$

Identifiera koeff. $b_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t) \quad n = 1, 2, \ldots \quad (*)$

Initialvillkoret ger $\sum_{1}^{\infty} b_n(0) \sin \frac{n\pi}{L} x = h(x) \qquad 0 < x < L$

$b_n(0)$ är alltså bestämda som F-sinus-koeff för h.

Lös $(*)$ med integrerande faktor $\exp\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$

$$\hookrightarrow \left[\exp\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) b_n(t)\right]' = \beta_n(t) \exp\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

$$\exp\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) b_n(t) = b_n(0) + \int_0^t \beta_n(t') \exp\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t'\right) dt'$$

Om istället vågekv.: $U_{tt} - c^2 U_{xx} = F(x,t)$

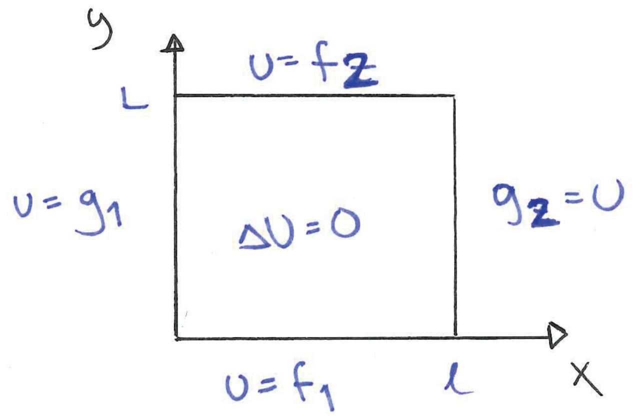
får man (*) $b_n''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t)$

↳ kan ofta lösas med Laplace

4.4 Dirichlets problem

$\Delta U = 0$ eller $\Delta U = F(x,y)$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ i en rektangel



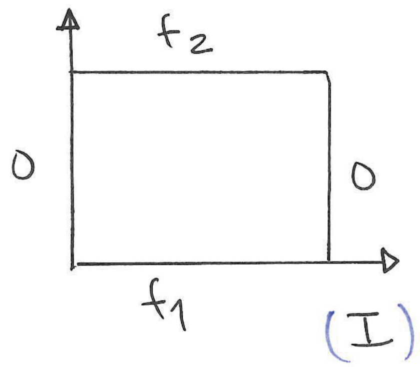
$U(x,0) = f_1(x)$

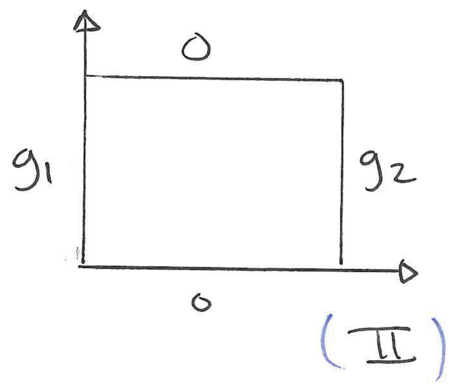
$U(x,L) = f_2(x)$

$U(0,y) = g_1(y)$

$U(l,y) = g_2(y)$

Superposition, dela upp i





Lös (II): variabelseparera, sätt $U = X(x)Y(y)$

$\Delta U = 0$ blir $X''Y + XY'' = 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad \text{konst.}$$

Har homogen randvillkor för $y=0$, $y=L$

alltså: $Y(0) = Y(L) = 0$

$Y''(y) = -\lambda Y(y)$, då måste $\lambda > 0$.

Låt $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$ $\Rightarrow$ $Y = \sin \mu y$, $\mu = \frac{n\pi}{L}$

$$Y(y) = \sin \frac{n\pi}{L} y \qquad n = 1, 2, \ldots$$

För X fås $X'' = \lambda X$, $X'' = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 X$

och $X = a \exp\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b \exp\left(-\frac{n\pi}{L} x\right)$

eller bättre $X = a' \sinh \frac{n\pi}{L} x + b' \sinh \frac{n\pi}{L} (l - x)$