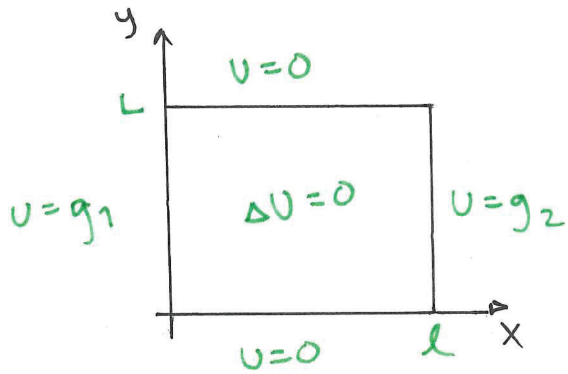
Mån LV5

Från förra gången:



$$u = X(x)\,Y(y)$$

RV: $Y(0) = Y(L) = 0$

$$Y = \sin \frac{\pi n}{L} y$$

$$X'' = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 X$$

$$X(x) = a \exp\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b \exp\left(-\frac{n\pi}{L}x\right)$$

eller

$$X(x) = a' \sinh \frac{n\pi}{L} x + b' \sinh \frac{n\pi}{L} \cancel{x}(\ell - x)$$

Ansätt $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sinh \frac{n\pi}{L} x + b_n \sinh \frac{n\pi}{L} \cancel{x}(\ell - x)\right) \sin \frac{n\pi}{L} y$$

$x = 0$

$\Rightarrow$ $$\sum_1^{\infty} b_n \sinh \frac{n\pi}{L}\ell \,\sin \frac{n\pi}{L} y = g_1(y)$$

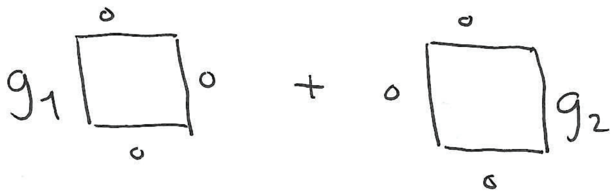
$x = \ell$

$\Rightarrow$ $$\sum_1^{\infty} a_n \sinh \frac{n\pi}{L}\ell \,\sin \frac{n\pi}{L} y = g_2(y)$$

utveckla g_1, g_2 i sin-serie på $(0, L)$

$$g_1(y) = \sum_1^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} y,$$ sätt $$b_n = \frac{\alpha_n}{\sinh \frac{\pi n}{L}\ell}$$

g_2 analogt!

Alt. dela upp 

Euler ekvationer

$$a x^2 y'' + b x y' + c y = 0 \quad \begin{cases} a, b, c \text{ är konst.} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Sätt $x = e^t$, $y = y(x(t))$

↳ ger ekv. i y, t med konst. koeff.
lösningar av typen $e^{ct} = x^c$

Lösningsmetod: Ansätt $y = x^\gamma$

$$y' = \gamma x^{\gamma-1}, \quad y'' = (\gamma^2 - \gamma) x^{\gamma-2} = \gamma(\gamma-1) x^{\gamma-1}$$

Ekv. blir:

$$a\gamma(\gamma-1)x^\gamma + b\gamma x^\gamma + c x^\gamma = 0$$

$$(a\gamma(\gamma-1) + b\gamma + c = 0)$$

Rötter γ_1, γ_2

om $\gamma_1 \neq \gamma_2$ är allmänn lösning till ekvationen

$$y(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2}$$

om $\gamma_1 = \gamma_2$ (dubbelrot) är allmänna lösningen

$$y(x) = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1} \ln x$$

Ex. $x^2 y'' + x y' = 0$

Ansätt $y = x^\gamma$

$\hookrightarrow \gamma(\gamma-1) + \gamma = 0 \quad , \quad \gamma^2 = 0$

Dubbelrot: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

Allmän lösning: $y(x) = c_1 + c_2 \ln x$

Alt. $x^2 y'' + x y' = 0 \longleftrightarrow x y'' + y' = 0$

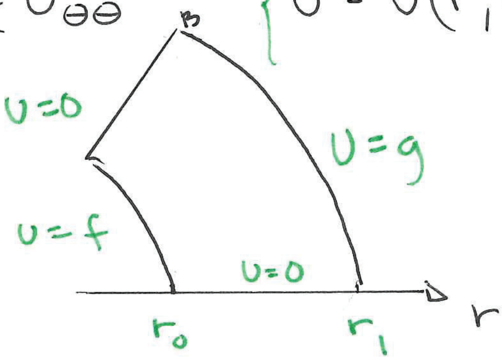
$(x y')' = 0 \longrightarrow x y' = c_1$

$y' = \dfrac{c_1}{x} \longrightarrow y = c_1 \ln x + c_2$

Dirichlets problem i polära koordinater

$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$ $\quad \{ u = u(r, \theta) \}$

$\left\{ \begin{array}{l} r_0 < r < r_1 \\ 0 < \theta < \beta \end{array} \right\} \longrightarrow$



$\Delta u = 0$ i området

$u(r_0, \theta) = f(\theta) \quad , \quad u(r_1, \theta) = g(\theta)$

$u(r, 0) = u(r, \beta) = 0$

Sök separerade lösningar $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

med $\Theta(0) = \Theta(\beta) = 0$

Ekv. blir $R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\overbrace{\,}^{\Theta(\theta)} + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0$

Multipl. med $\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$:

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \quad \text{konst.}$$

$$\Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta), \quad \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0$$

Får som vanligt:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 \quad \{n = 1, 2, \dots\}$$

$$\Theta(\theta) = \sin\frac{n\pi}{\beta}\theta$$

För R fås : $r^2R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 R(r) = 0$

Detta är en Eulerekv! Ansätt $R(r) = r^\gamma$

Får $\gamma(\gamma-1) + \gamma - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 = 0$

$$\gamma^2 = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2, \quad \gamma = \pm\frac{n\pi}{\beta}$$

så $R(r) = ar^{\frac{n\pi}{\beta}} + br^{-\frac{\pi n}{\beta}}$

Sep. lösn. $\left(ar^{\frac{n\pi}{\beta}} + br^{-\frac{n\pi}{\beta}}\right)\sin\frac{n\pi}{\beta}\Theta$

Ansätt $u(r,\theta) = \sum_1^\infty \left(a_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n r^{-\frac{n\pi}{\beta}}\right)\sin\frac{n\pi}{\beta}\theta$

$r = r_0$

$$\sum_1^{\infty} \left(a_n r_0^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n r_0^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right) \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta = f(\theta)$$

$r = r_1$

$$\sum_1^{\infty} \left(a_n r_1^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n r_1^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right) \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta = g(\theta)$$

utveckla
$$\begin{cases} f(\theta) = \sum_1^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta \\ g(\theta) = \sum_1^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi}{\beta}\theta \end{cases}$$

Identifiera koefficienter:
$$\begin{cases} a_n r_0^{\frac{n\pi}{\beta}} + b r_0^{-\frac{n\pi}{\beta}} = c_n \\ a_n r_1^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n r_1^{-\frac{n\pi}{\beta}} = d_n \end{cases}$$

{gäller för $n = 1, 2, \ldots$}

Ekv. i a_n, b_n linjärt, kan lösas

determinant: $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{-\frac{n\pi}{\beta}} \neq 0$

systemet lösbart för $n = 1, 2, \ldots$

Får a_n, b_n och $u(r, \theta)$ $\longrightarrow$ klart!

Variant:

Får $u = R\Theta$, $\Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta)$

Som nyss, men nu är Θ periodisk, så lösn. är:

$$\lambda = n^2 \multimap \Theta(\theta) = e^{in\theta}, \quad \cancel{n \neq} \quad n \in \mathbb{Z}$$

För R fås nu $r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0$

Eulerekv., ansätt $R = r^\gamma \multimap \gamma(\gamma-1) + \gamma - n^2 = 0$

$\gamma = \pm n$ ger lösningen

$$R(r) = ar^n + br^{-n}, \quad n \neq 0$$

$$R(r) = a + b\ln r, \quad n = 0$$

$R(r)$ ska vara begränsad då $r \to 0$, ~~kant~~ kan ej ha r^γ för $r < 0$, ej heller $\ln r$, $r = 0$

Kvar blir $ar^{|n|}$, $n \neq 0$ och a

Acceptabla sep. lösningar:

$$\begin{cases} e^{in\theta} r^{|n|}, & n \neq 0 \\ 1 \end{cases}$$

Ansätt $u(r,0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} r^{|n|}$

RV ger $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} r_1^{|n|} = g(\theta)$

$c_n r_1^{|n|}$ ska vara Fourierkoeff. för g

Mera explicit: Betrakta fallet $r_1 = 1$

Då är $c_n = c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)e^{-in\varphi}\,d\varphi$

och $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)e^{-in\varphi}\,d\varphi\, e^{in\theta} r^{|n|} =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\exp[in(\theta-\varphi)]r^{|n|}\,d\varphi$$

$$= P(r,\theta-\varphi)$$

Beräkna $P(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} r^{|n|} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{0}^{\infty} e^{in\varphi} r^{|n|} + \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{-1} e^{in\varphi} r^{|n|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-e^{i\varphi}r} + \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} e^{-in\varphi} r^{n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-e^{i\varphi}r} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\varphi}r}{1-e^{-i\varphi}r} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1-e^{-i\varphi}r+e^{i\varphi}-r^2}{|1-re^{i\varphi}|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{i\varphi}|^2}$$

Alltså $\displaystyle U(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\, P(r,\theta-\varphi)\, d\varphi$

där $\displaystyle P(r,\theta-\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|re^{i\theta}|^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}$

$\left\{ g = g(\varphi) = g(e^{i\varphi}), \quad z = re^{i\theta} \right\}$

$\displaystyle \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2} = P(z,\varphi)$

$\displaystyle U(z) = \int_{-\pi}^{\pi} P(z,\varphi)\, g(\varphi)\, d\varphi$ P är Poissonkärnan