{Ons Lv5}

5. Besselfunktionen

Vågekv. $u_{tt} = c^2 \Delta u$ i två rumsdim.

polära koordinater: $u = u(r, \theta, t)$ i ngt område

⌜ Ex. cirkulärt membran ⌟

Ekv.: $u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$

separera: $u(r, \theta, t) = R(r)\, \Theta(\theta)\, T(t)$

Får: $R \Theta T'' = c^2 \left(R'' \cdot \Theta T + \frac{1}{r} R' \Theta T + \frac{1}{r^2} R \Theta'' T \right)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \ \{\text{konst.}\}$$

Antag $\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2, \mu > 0)$

$$\rightarrow \frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \nu^2 \ \{\text{konst.}\}$$

$(\nu \geq 0)$

$$\rightarrow r^2 R'' + r R' + (\mu^2 r^2 - \nu^2) R = 0 \qquad (*_\mu)$$

Dela m. r:

$$r R'' + R' + \left(\mu^2 r - \frac{\nu^2}{r} \right) R = 0$$

$$(rR')' - \frac{\nu^2}{r} R + \mu^2 r R = 0$$

$$(rf')' + pf + \lambda \omega f = 0 \quad \text{reg. S-L-problem}$$

$$p(r) = -\frac{\nu^2}{r}, \quad w(r) = r$$

Reg. S-L-problem i $a < r < b$, om $a > 0$

Sätt i $x = \mu r$, $R(r) = f(x) = f(\mu r)$ i $(*_\mu)$

$$R'(r) = \mu f'(\mu r) \qquad R''(r) = \mu^2 f''(\mu r)$$

Ekv. blir nu:

$$\mu^2 r^2 f''(\mu r) + \mu r f'(\mu r) + (\mu^2 r^2 - \nu^2) f(\mu r) = 0$$

$\rightarrow$ r förekommer bara i komb. med μ!

$$= x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0 \quad (*)$$

Bessel ekvation. ordn. ν

f satisfierar $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $R(r) = f(\mu r)$ satisfierar $(*_\mu)$

går att hitta lösn. till $(*)$ med potensserier

om $\nu = n = \{0, 1, 2, \dots\}$ duger

$$f(x) = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad \{\text{konvergent}\}$$

konvergent i hela $\mathbb{C}$-planet, hel funktion av $x \in \mathbb{C}$

Andra ν-värden? Vad är $(\nu+k)!$?

$$m! = \int_0^\infty e^{-x} x^m \, dx \qquad m = 0, 1, \dots$$

$$(m-1)! = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} \, dx \qquad m = 1, 2, \dots$$

Sätt $$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} \, dx \qquad \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

Gamma-funktionen, kan fortsättas till en meromorf funktion i hela planet med poler i $0, -1, -2, \dots$

Ersätt $(\nu+k)!$ med $\Gamma(\nu+k+1)$ och sätt

Def. $$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad \nu \notin \{-1, -2, \dots\}$$

$$\Gamma(m) = (m-1)!, \qquad m! = \Gamma(m+1)$$

om $\nu \in \mathbb{R}$ och $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$

Men om $\nu \in \{-1, -2, \dots\}$, säg $\nu = -n$

kan vi tolka $\frac{1}{\Gamma(j)}$ som 0 för $j = 0, -1, -2, \dots$

Då säger det. att

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

ν ersätts med $-n$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'+n}}{(k'+n)!\,\underbrace{\Gamma(k'+1)}_{k'!}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{sätt } k' = k-n \\ \text{s.a. } k' \in \{0,1,\dots\} \end{array} \right\}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 1,2,\dots$$

$J_\nu, J_{-\nu}$ löser samma ekvation $(*)$

För $\nu \notin \mathbb{Z}$ är de linjärt oberoende och bildar en bas $\mathcal{B}$ för lösn.-rummet till $(*)$

Men man brukar använda en annan bas J_ν, Y_ν

$\nu > 0, \ \nu \notin \mathbb{Z}$

(i ∞ är $J_\nu(x) \approx \dfrac{\sin(x - c_\nu)}{\sqrt{x}}$ och

$$Y_\nu \approx \frac{\cos(x-c_\nu)}{\sqrt{x}} \Bigg)$$

För $\nu = n \in \{0,1,2,\dots\}$ finns bas i lösn.-rummet

J_n, Y_n. J_ν, Y_n kallas Besselfkn. av 2:a slaget

Y_ν, Y_n är singulära i 0

$Y_\nu(x) \sim$ konst. $x^{-|\nu|}$, $x \to 0$, $\nu \neq 0$

$Y_0(x) \sim$ konst. $\ln x$, $x \to 0$

Vanliga randvillkor för $(*)$, $(*_\mu)$ i $[0,b]$

i 0: R begr. (eller konst.) vid 0

i b: $R(b)=0$ eller $R'(b)=0$

eller $\alpha R(b) + \tilde{\alpha} R'(b) = 0$

För lösningen $R(r) = aJ_\nu(\mu r) + bY_\nu(\mu r)$

Randvillkor i 0 ~~ute~~ utesluter Y_ν-termen

Randvillkor i b ger $J_\nu(\mu b)=0$ el. $J_\nu'(\mu b)=0$

eller $\alpha J_\nu(\mu b) + \tilde{\alpha}\mu J_\nu'(\mu b) = 0$

$$\frac{\alpha b}{\tilde{\alpha}} J_\nu(\mu b) + \mu b\, J_\nu'(\mu b) = 0$$

med $c = \dfrac{\alpha b}{\tilde{\alpha}}$, $c J_\nu(\mu b) + \mu b\, J_\nu'(\mu b) = 0$

dvs. $x = \mu b$ ska vara nollställe till funktionen

$c J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$

Mellanfallet $J_\nu'(\mu b)=0$ täcks av sista fallet med $c=0$

Vilka nollställen har $J_\nu(x)$ och $cJ_\nu(x)+xJ_\nu'(x)$ i $x>0$?

Sen väljs μ så att μb är ett sådant nollställe.

Sats 5.2 (A)

För varje $\nu \in \mathbb{R}$ har J_ν oändligt många nollställen $(\lambda_k)_1^\infty$ i $\{x>0\}$

Mera precist är $\lambda_k \approx k\pi+\beta$ eller $\lambda_k - k\pi - \beta \to 0$, $k\to\infty$ där $\beta=\beta(\nu)$

(B) Om $\nu\in\mathbb{R}$ och $c\geq 0$ gäller samma sak för nollställena ~~...~~ $(\tilde{\lambda}_k)_1^\infty$ till

$cJ_\nu(x)+xJ_\nu'(x)$ fast nu med $\beta=\beta(\nu,c)$

Dessa $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k$ beror av ν skrivs ofta

$\lambda_{k\nu}, \tilde{\lambda}_{k\nu}$