Förra gången

Fre LV5

Vågekv. $U_{tt} = c^2 \Delta U$, $U = U(r, \theta, t)$

Variabel sep. $\longrightarrow$ $U = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$

R satisfierar $r^2 R'' + rR' + (\mu^2 r^2 - \nu^2) R = 0$ $(*)_\mu$

$R(r) = f(\mu r)$, $f(x)$ satisf.

$x^2 f'' + x f' + (x^2 - \nu^2) f = 0$ $(*)$

Lösning för $f(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$

Randvillkor. R begr. vid 0

$R(b) = 0$ eller $\alpha R(b) + \tilde{\alpha} R(b) = 0$

ger $c_2 = 0$ och $J_\nu(\mu b) = 0$

eller $c J_\nu(\mu b) + \mu b J_\nu(\mu b) = 0$

μb nollställe ~~titt~~ λ_k till J_ν eller nollställe $\tilde{\lambda}_k$ till $c J_\nu(x) + x J'_\nu(x)$

Lösningar ges av $R(r) = J_\nu\left(\frac{\lambda_k}{b} r\right)$

eller $R(r) = J_\nu\left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{b} r\right)$

egenfunktioner till S-L-problem

Huvudsats om ortogonalitet

Sats 5.3

$\nu \geq 0$, $b > 0$

$w(r) = r$, $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k$ nollställen som ovan

(a) Funktionerna $\varphi_k(x) = J_\nu\left(\frac{\lambda_k}{b} x\right)$, $k = 1, 2, \ldots$

bildar ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2_w[0,b]$

och $\|\varphi_k\|^2_w = \frac{b^2}{2} J_{\nu+1}(\lambda_k)^2$

(b) Om $c \geq 0$ gäller detsamma för funktionerna

$\varphi_k(x) = J_\nu\left(\frac{\tilde{\lambda}_k}{b} x\right)$, $k = 1, 2, \ldots$;

dock måste man i fallet $c = 0$, $\nu = 0$

tillfoga funktionen $\varphi_0(x) = 1$ till ortogonalsystemet.

Här är

$$\|\varphi_k\|^2_w = \frac{b^2(\tilde{\lambda}_k - \nu^2 + c^2)}{2\tilde{\lambda}_k^2} J_\nu(\tilde{\lambda}_k)^2 , \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\|\varphi_0\|^2 = \frac{b^2}{2}$$

Kan också utveckla varje $h \in L^2_w[a,b]$ $w(x) = x$

som:

$$h(x) = \sum_1^\infty c_k J_\nu\left(\frac{\lambda_k}{b} x\right) , \quad c_k = \frac{1}{\|J_\nu(\frac{\lambda_k}{b} x)\|^2_w} \langle h, J_\nu(\tfrac{\lambda_k}{b} x)\rangle_w$$

J_ν' relaterad $J_{\nu \pm 1}$

$$J_{\pm\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$$

Genererande funktion

Sats (s.134)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n = \exp\left[\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ x \in \mathbb{R}$$

Bevis

$$\exp\left(\frac{1}{2}xz\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x/z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z^k}\left(\frac{x}{2}\right)^k$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z^{j-k} \frac{(-1)^k}{k!\,j!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k}$$

Ersätt j med $n = j-k$ s.a. $n = -k, -k+1, \ldots$

Får $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\underbrace{\underbrace{j=0}_{n=-k}}_{}}^{+\infty} z^n \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$ $=$ liknar potensserien för Bessel funktioner...

eller $n = -\infty$ om $\frac{1}{j!}$ sätts till 0 för $j = -1, -2, \ldots$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} z^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}_{= J_n(x)}$$

Sats {Bessels formler}

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin\theta - in\theta)\, d\theta = \qquad (\#)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

och

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta) \overbrace{\cos n\theta}^{n \text{ jämn}}\, d\theta$$

$\uparrow$ sin {n udda}

Bevis

Ta $z = e^{i\theta}$ i den genererande funktionen

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \cancel{e^{x\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}}} = \exp\left[x \cdot \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}\right] =$$

$$= \exp(ix \sin n\theta)$$

{2π-periodisk funktion av θ

F-serie

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix\sin n\theta)\exp(-in\theta)\,d\theta$$

Ta realdelen

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cdots$$

Låt n vara jämnt

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = J_n(x)$$

Addera (#) för n och -n

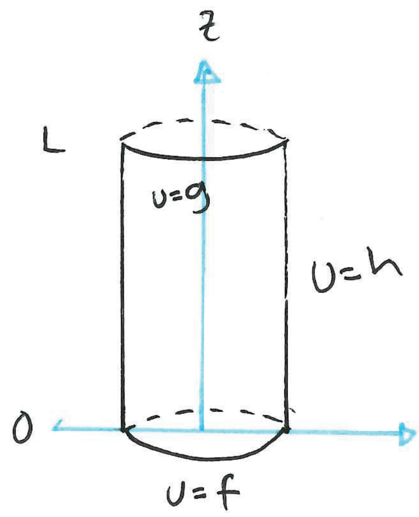
$$J_n(x) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix\sin\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

Ta realdelen

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(x\sin\theta)\cos n\theta}_{\pi\text{-periodisk}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cdots$$

Dirichlets problem i cylinder



$\Delta u = 0$, $u = u(r, \theta, z)$

$0 \leq r \leq b$, $0 \leq z < L$

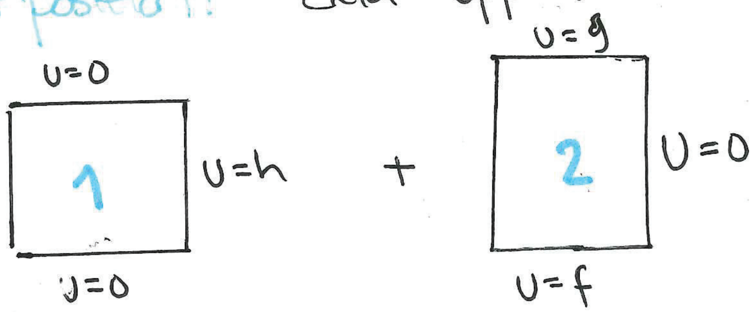
Anta allt oberoende av θ

så att $u = u(r, z)$

$u(r,0) = f(r)$, $u(r,L) = g(r)$ Randvilkor!

$u(b,z) = h(z)$

Superposition: dela upp i



Addera sen lösningarna!

1. $u = u(r,0)$, $u(r,L) = 0$, $u(b,z) = h(z)$

Ekv. blir $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \cancel{\frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}} + u_z = 0$

ty obero. av θ

Söker alltså separerade lösningar s.a. $u = R(r) Z(z)$

Får

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{R} = \frac{-Z''}{Z} = \lambda \quad \text{konst.}$$

$$Z'' = -\lambda Z, \quad Z(0) = 0, \quad Z(L) = 0$$

$$\lambda = \mu^2, \quad \mu = \frac{n\pi}{L} \quad \{n = 1, 2, \ldots\}$$

$$\rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$Z(z) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Får $r^2 R'' + r R' - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 r^2 R = 0$

har $r^2 R'' + r R' - \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 r^2 + \nu^2\right) R = 0$ $\binom{*}{*_\mu}$

med $\nu = 0$

Variabelbytet $x = \mu r$ ger som förut att lösningen $R(r)$ till $\binom{*}{*_\mu}$ ges av $R(r) = f(\mu r)$ där $f(x)$ löser

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - (r^2 + \nu^2) f = 0 \quad \binom{*}{*}$$

$\binom{*}{*}$ kallas Bessels modifierade ekv.

Jfr. $f'' + \mu^2 f = 0$ $f'' - \mu^2 f = 0$

$\sin \mu x \;\; \cos \mu x$ $\sinh \mu x \;\; \cosh \mu x$

$\binom{*}{*}$ har lösningar I_ν, K_ν på $\mathbb{R}_+$

I_ν är kont. vid 0, K_ν är singulär i 0

I_ν, I_ν' är positiva på $\mathbb{R}_+$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$$

Resultat: Lösn. till $\binom{*}{*_\mu}$ med $\mu = \frac{n\pi}{L}$

är $R(r) = a I_\nu\left(\frac{n\pi}{L} r\right) + b' K_\nu\left(\frac{n\pi}{L} r\right)$

K_ν förkastas ty R ska vara begr. i 0

Får sep. lösningar:

$$I_0\left(\frac{n\pi}{L} r\right) \sin \frac{n\pi}{L} z$$

Ansätt $u(r,z) = \sum_1^\infty c_n I_0\left(\frac{n\pi}{L} r\right) \sin \frac{n\pi}{L} z$

$r = b$:

$$\sum c_n I_0\left(\frac{n\pi}{L} b\right) \sin \frac{n\pi}{L} z = h(z)$$

Utveckla $h(z) = \beta_n \sin \frac{\pi n}{L} z$

$$c_n = \frac{\beta}{I_0\left(\frac{n\pi}{L} b\right)}$$

Klart!