Ons Lv6

Sats 5.4

Funktionerna

$$(r,\theta) \mapsto J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}r\right)\cos n\theta \qquad k=1,2,\dots \qquad n=0,1,\dots$$

och

$$(r,\theta) \mapsto J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}r\right)\sin n\theta \qquad k=1,2,\dots \qquad n=1,2,\dots$$

bildar tillsammans ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2([0,b]\times[-\pi,\pi]\,;\ r\,dr\,d\theta)$ dvs i $L^2(x^2+y^2\leq 1\,;\ dx\,dy)$

Bevis

Visa fullständighet.

Ta $h \in L^2 \dots$ som är ortogonal mot alla $J_n(\ )\cos\dots$ och $J_n(\ )\sin\dots$

verifiera att $h=0$ enligt Sats 3.4

Har $0 = \iint J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}r\right)\cos n\theta\ h(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta =$

$$= \int_0^b J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}r\right) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} h(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta}_{\text{def.} \Rightarrow\ = h_n(r)}\ r\,dr \qquad \forall\, n,k$$

$\boxed{\text{Fixera } n!}$

$J_n\left(\frac{\lambda_{kn}}{b}r\right)$, $k=1,2,\dots$, fullständigt ortogonalsystem medför att $h_n=0$ (i L^2-mening)

Motsvarand för $\sin n\theta$!

~~Motsvarande för~~

$\boxed{\text{Fixera } r!}$

$h_n(r) = 0$ och motsvarande för sin.

Då är funktionen $\theta \mapsto h(r,\theta)$ ortogonal mot alla $\cos n\theta$ och $\sin n\theta$ i $[-\pi\ \pi]$

→ Alltså är $h(r,\theta) = 0 \ \forall\ \theta$, så $h=0$ i $L^2(\dots)$

$\square$

Kap. 6 ortogonala polynom

$\mathcal{P}_n = \{\text{polynom av grad} \leq n\}$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$\mathcal{P}_n$ vektorrum; bas: $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$

↳ $\dim \mathcal{P}_n = n+1$

Ska betrakta följder av polynom!:

$(P_n)_{n=0}^{\infty}$ där P_n har grad exakt n dvs.

$P_n = \alpha_n x^n + \text{lägre ordn. termer}, \quad \alpha_n \neq 0$

Lemma 6.1 Då är $P_0, \dots, P_n$ en bas i $\mathcal{P}_n$

Bevis

Räcker visa att $P_0, \dots, P_n$ är linjärt oberoende

Men: $\sum_{k=0}^{n} c_k P_k = 0$ →

Detta medför:

$$c_n(\alpha_n x^n + \ldots) + c_{n-1}(\alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots) + \ldots + c_0 x_0 = 0$$

$$\Rightarrow c_n \alpha_n x^n + (\text{lägre termer}) = 0$$

Får alltså $c_n \alpha_n = 0$, $c_n = 0$

$$c_{n-1}\alpha_{n-1} = 0 \qquad c_{n-1} = 0$$

osv. $\square$

Varje polynom P i $\mathcal{P}_n$ kan alltså skrivas som

$$P = \sum_0^n c_k P_k$$

Vill ha P_n parvis ortogonala i $L^2_w[a,b]$

där $-\infty \leq a,b \leq \infty$ och $w > 0$ i $[a,b]$

Anta alla α_n givna. Då ska vi se att alla P_n är entydigt bestämda ~~av~~ w och $(\alpha_n)_0^\infty$

$P_0 = \alpha_0$, anta $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ är bestämda

sök P_n, och $P_n \perp P_0, \ldots, P_{n-1}$ dvs $P_n \perp \mathcal{P}_{n-1}$

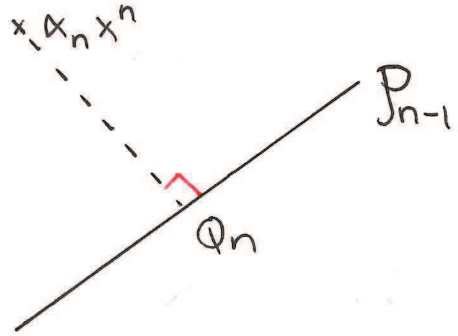
skriv $P_n(x) = \alpha_n x^n - Q_n(x)$, $Q_n \in \mathcal{P}_{n-1}$

$$Q_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} c_m P_m$$

$$\alpha_n x^n - \sum_{m=0}^{n-1} c_m P_m \perp P_k \qquad \text{betyder}$$

$$\alpha_n \langle x^n, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle_w$$

$$c_k = \frac{\langle \alpha_n x^n, P_k \rangle}{\|P_k\|_w^2}$$



Q_n är projektion, dvs bästa approximationen av $\alpha_n x^n$ i $\mathcal{P}_{n-1}$ {Satsen om bästa approximation}

Alltså är P_n entydigt bestämd.

Ger rekursiv konstruktion av $P_0, P_1, P_2, \ldots$

Alternativ konstruktion

skriv. $P_n = \alpha_n x^n + \alpha_{n,n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n,0}$

Bestäm α_{nk} så att $P_n \perp 1, x, \ldots, x^{n-1}$

(ekv. system för α_{nk}) ↳ Gram-Schmidt!

Ex. Vikt $w(x) = 1$ i $[-1,1]$ ger Legendre-polynom

$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} \quad \ldots$

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x + a$

Vill visa $P_1 \perp P_0$ enligt Gram-Schmidt,

dvs $P_1 \perp 1$ ger $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+a) \cdot 1 \, dx = 0$

$2a = 0, \quad a = 0 \longrightarrow P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + bx + c \perp 1, x$ $\{P_2 \perp P_1, P_0\}$

$$0 = \langle \tfrac{3}{2}x^2 + bx + c, x \rangle = b\langle x, x \rangle = b\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \cancel{\tfrac{3}{2}}\,\tfrac{2}{3}\, b$$

$\to b = 0$

$$0 = \langle \tfrac{3}{2}x^2 + c, 1 \rangle = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx + c\int_{-1}^{1} 1\,dx = 1 + 2c$$

$\to c = -\frac{1}{2}$

$\cancel{P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1}$ $\qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Alt.

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^3 - \underbrace{\frac{1}{\|1\|^2}\langle \tfrac{3}{2}x^2, 1\rangle}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{\|x\|^2}\underbrace{\langle \tfrac{3}{2}x^2, x\rangle}_{=0}$$

Hermite polynom

Vikt $w(x) = e^{-x^2}$ på $\mathbb{R}$

Taylors formel $\exp[-(x+h)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}h^n$

$$\exp(-(x+z)^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n \quad \text{där}$$

$$a_n = a_n(x) = (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$ som är av formen

$e^{-x^2}\cdot$ polynom. Detta polynom är Hermite-polynomet

$H_n(x)$

Def. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ kallas

Rodrigues formel

Alltså $\exp\left(-(x-z)^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \cdot e^{-x^2}$

$$\exp\left(2xz - z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n \quad \text{(genererande funktion)}$$

$H_0(x) = 1 \qquad H_1(x) = 2x$

$H_n(x) = (2x)^n + \text{lägre ordn.}$

Sats 6.11

H_n är parvis ortogonala i $L^2_w(\mathbb{R})$, $w = e^{-x^2}$ och

$\|H_n\|_w^2 = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$

Bevis

Ta $m \leq n$.

$$\langle H_m, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} H_m(x) e^{-x^2}\, dx$$

$m < n$ ger $\frac{d^n}{dx^n} H_m = 0$ ger att $H_n \perp H_m$

$m = n \longrightarrow \|H_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} H_n(x) e^{-x^2}\, dx =$

$$= \int 2^n \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x^2}\, dx = 2^n \cdot n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}$$

Obs! BETA s.181 : $\int e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ Inget annat!!

Sats 6.12 (cor. 6.2)

Ortogonalsystemet $(H_n)_0^\infty$ är fullständigt i $L^2_w(\mathbb{R})$

Bevis

Visa att $f \in L^2_w$, $f \perp H_n$ $\forall n$ medför att $f = 0$. Då är f ortogonal mot alla polynom. ska visa att $e^{-x^2} f(x) = 0$

$$\widehat{e^{-x^2} f(x)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \int f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n e^{-x^2}\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-i\xi)^n}{n!} \underbrace{\int f(x) x^n e^{-x^2}\,dx}_{=0}$$

$\square$

Diff-ekv. för H_n

$$H_n'(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) =$$

$$= (-1)^n e^{x^2}\left(2x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2}\right) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_{n+1}'(x)$$

$$\exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = \{n = n' + 1\} = \longrightarrow$$

$$= \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{H_{n'+1}(x)}{(n'+1)!} z^{n'+1}$$

Ta $\frac{d}{dx}$: $$2z\exp(2xz-z^2) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{H'_{n+1}(x)}{(n+1)!} z^{n+1}$$

eller $n=0$

Men! $$\underbrace{2z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n}_{2\sum_{0}^{\infty} \frac{H_{n}(x)}{n!} z^{n+1}}$$

$$\frac{2H_n(x)}{n!} = \frac{H'_{n+1}(x)}{(n+1)!} \longrightarrow H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$$

$$H''_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

$$\rightarrow H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

$$\left(e^{-x^2} H'_n(x)\right)' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{S-L-ekvation} \\ \text{där } w(x) = e^{-x^2} \text{ (vikten)} \end{array} \right\}$$

$H_n(x)$ är egenfunktionen till SL-problemet