Fre LV6

Hermite polynom

$H_n(x)$, $w(x) = e^{-x^2}$

$H_n'(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$

$(e^{-x^2} H_n'(x))' + 2n e^{-x^2} H_n(x) = 0$

Flytta från $L^2_w(\mathbb{R})$ till $L^2(\mathbb{R})$:

sätt $h_n(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) H_n(x)$ Hermite funktioner

$\cancel{\int h_n(x) H_n(x)}$

$\int h_n(x) h_m(x)\,dx = \int H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\,dx = 0$ $n \neq m$

$(h_n)_0^\infty$ är ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(\mathbb{R})$

$\widehat{\exp(-\frac{x^2}{2})} = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{\xi^2}{2})$

Sats

$\hat{h}_n = \sqrt{2\pi}\,(i)^n h_n$

Induktionsbevis: $n=0$ $\to$ klart!

Från n till $n+1$:

$h_n'(x) = (\exp(-\frac{x^2}{2}) H_n(x))' = -x\exp(-\frac{x^2}{2}) H_n(x) + \exp(-\frac{x^2}{2}) H_n'(x)$

$= -x h_n(x) + \exp(\frac{x^2}{2})\left[2x H_n(x) - H_{n+1}(x)\right] =$

$$= x h_n(x) - h_{n+1}(x)$$

$$h_{n+1}(x) = \left(x - \frac{d}{dx}\right) h_n(x)$$

$$\widehat{h_{n+1}}(\xi) = \left(i \frac{d}{d\xi} - i\xi\right) \hat{h}_n(\xi) = -i\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \hat{h}_n(\xi) =$$

$$= (-i)\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \sqrt{2\pi}\, (-i)^n\, h_n(\xi) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, (-i)^{n+1}\, h_{n+1}(\xi)$$

$\square$

Legendre polynom

$P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, ortogonala i $L^2[-1,1]$

vikt $w(x) = 1$

Def. $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ kallas

Rodrigues formel

$(P_n)_0^\infty$ fullständigt ortogonalsystem i $L^2[-1,1]$

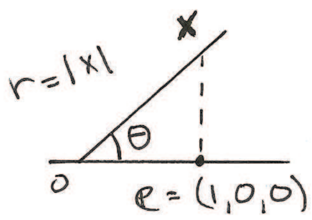
Diff. ekv. $\quad ((1-x^2) P_n'(x))' + n(n+1) P_n(x) = 0$

↳ singulärt SL-problem

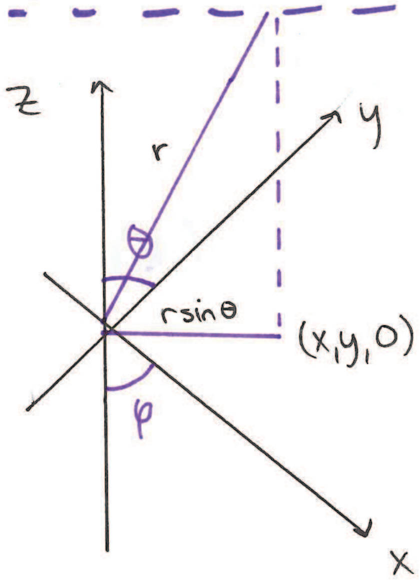
Genererande funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n = \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (*) \quad 0 \leq r < 1$$

$$|\mathbf{x} - e| = (\quad (*) \quad)^{\frac{1}{2}}$$



6.3 Sfäriska koord. i $\mathbb{R}^3$



θ = latitud $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

φ = longitud $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$z = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\sin\theta\cos\varphi$

Dirichlets problem i klot $x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2$

dvs $r < R_0$

$$\Delta U = 0 \qquad \begin{cases} U = U(r, \theta, \varphi) \\ U(R_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

$$\Delta U = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\theta\, U_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} U_{\phi\phi}$$

Separera: $U = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi)$

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\phi''}{\phi} = 0$$

$$\sin^2\theta\,\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} + \sin\theta\,\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta} = \frac{-\phi''}{\phi} = \text{konst.}$$

ϕ är 2π-periodisk så konst. $= m^2$, $\quad m \in \{0, 1, \dots\}$

och

$$\phi(\varphi) = ae^{im\varphi} + be^{-im\varphi}$$

Får

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = \frac{-1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\ \Theta')'}{\Theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \lambda \quad \text{konst.}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\ \Theta')' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + \lambda\Theta = 0 \qquad (*)$$

$$(\sin\theta\ \Theta')' - \frac{m^2}{\sin\theta}\Theta + \lambda\sin\theta\ \Theta = 0$$

SL-problem med $w(\theta) = \sin\theta$, singulärt

Variabelbyte; sätt $s = \cos\theta \qquad -1 \leq s \leq 1$

sätt $\Theta(\theta) = S(s)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d}{ds} = -\sin\theta\frac{d}{ds}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) = -\frac{d}{ds}\left(-\sin^2\theta\frac{dS(s)}{ds}\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{dS(s)}{ds}\right)$$

Ekv. $(*)$ blir

$$((1-s^2)S'(s))' - \frac{m^2}{1-s^2}S(s) + \lambda S(s) = 0 \qquad (**)$$

singulär SL-problem med vikt 1

Fallet $m=0$:

Får $\lambda = n(n+1)$ $\quad n=0,1,\ldots$

$S(s) = P_n(s)$, $\quad \Theta(\theta) = \cancel{P_n(s)\cos\theta}\ P_n(\cos\theta)$

m = godtyckligt:

Då är egenfunktionerna S som löser $(\ast\ast)$

$$S(s) = P_m^{|m|}(s) \qquad |m| \leq n$$

där

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \qquad 0 \leq m \leq n$$

är Legendre-funktioner

Med fixt m får vi lösn. till $(\ast\ast)$ $S(s) = P_n^{|m|}(s)$

med $n = |m|, |m|+1, \ldots$

$$\Theta(\theta) = P_n^{|m|}(\cos\theta) \qquad n = |m|, |m|+1, \ldots$$

För fixt m är $\left(P_n^{|m|}(s)\right)_{n=|m|}^{\infty}$ ett fullst. orto. system i $L^2[-1,1]$

Analogt är $\left(P_n^{|m|}(\cos\theta)\right)_{n=|m|}^{\infty}$ ett fullständigt ortogonal-system i $L^2_{\sin\theta}[0,\pi]$

Produkterna $Y_{mn}(\theta,\varphi) = e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta)$

där $m \in \mathbb{Z}$ $\quad n = |m|, |m|+1, \ldots$ bildar ett fullständigt ortogonal-system i $L^2_{\sin\theta}([0,\pi]\times[-\pi,\pi])$ (integration mot $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$)

dvs. i L^2[enhetssfären $\{r=1\}$ med dess ytmått $\sin\theta \, d\theta d\varphi$]

Y_{mn} kallas klotytefunktioner eller spherical harmonics

Dä är restriktioner till enhetssfären av polynom i x, y, z

För R får vi

$$r^2 R'' + 2r R' - n(n+1) R = 0$$

Eulerekv., sätt $R(r) = r^\gamma$

$$\gamma(\gamma-1) + 2\gamma - n(n+1) = 0$$

$$\hookrightarrow \gamma^2 + \gamma - n^2 - n = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} + n^2 + n}_{(n+\frac{1}{2})^2}} = \begin{cases} n \\ -n-1 \end{cases}$$

Lösn. $R(r) = a' r^n + b' r^{-n-1}$

r^{-n-1} är obegränsad vid $0 \rightarrow b' = 0$

$R(r) = r^n$

Sep. lösn.: $r^n e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta)$