Jens

Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK Telefon: Johan Hoffman, 0740–459022

Chalmers tekniska högskola 2001–08–30 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Låt fuktionen f definieras av
$$f(x) = \int_0^2 e^{ix\xi}/(1+\xi)\,d\xi.$$
Beräkna
$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \qquad (b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx. \qquad (6p)$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & x > 0, \quad 0 < y < 1, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & x > 0, \\ u(0,y) = y - y^3, & 0 < y < 1, \\ u \ \text{ begränsad} & \text{då } x \to \infty. \end{cases} \qquad (6p)$$

3. Funktionen $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och $f(\theta) = |\theta|$ för $-\pi < \theta < \pi$. Utveckla f i komplex Fourierserie. Bestäm sedan en 2π-periodisk lösning till ekvationen
$$y'' + 2y = f. \qquad (6p)$$

4. Definiera för $k \in \mathbb{Z}$ funktionen u_k på $\mathbb{R}$ genom $u_k(x) = e^{-ikx}$ om $x \in (-\pi, \pi)$, $u_k(x) = 0$ annars. Låt sedan $\hat{u}_k(\xi)$ vara Fouriertransformen av u_k. Beräkna
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k(\xi)|^2. \qquad (6p)$$
Ledning: Uppfatta $\hat{u}_k(\xi)$ som Fourierkoefficienter av en viss funktion.

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \pi/2$, $1 < r < a$ (polära koordinater i planet), med randvillkoren
$$\begin{cases} u(1,\theta) = u(a,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi/2, \\ u(r,0) = 0, & 1 < r < a, \\ u(r,\pi/2) = c, & 1 < r < a. \end{cases} \qquad (6p)$$

6. En lång, rät cirkulär cylinder är delad på längden i två halvor an ledande material isolerade från randen. Den ena halvan är jordad och den andra hålls vid den konstanta potentialen Φ_0. Bestäm potentialen $\Phi(x,y)$ i en godtycklig punkt (x,y) inuti cylindern. Bestäm de ekvipotentiala kurvorna. (6p)

7. Visa att
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \exp\Big[\frac{x}{2}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big], \qquad \forall x, \quad \forall z \neq 0. \qquad (7p)$$

8. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen. (7p)

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, 2001-08-30

1) a) Inversionsformeln säger att

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Det följer att

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\pi}{1+\xi}, & 0<\xi<2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

[P.g.a. entydigheten hos (invers) F-transform]

Parsevals formel $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi = 2\pi\int_0^2 \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{1+\xi}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

b) Observera att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\,dx = \frac{\hat{f}(-1)+\hat{f}(1)}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: a) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \frac{4\pi}{3}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

2) Bestäm först $u_0(y)$ som lösning till DE+RV:

$$\begin{cases} u_0'' = y \\ u_0(0) = u_0(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0(y) = \frac{y^3}{6} + ay + b \\ u_0(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ u_0(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{u_0(y) = \frac{1}{6}(y^3 - y)}$$

Ansätt sedan $\underline{u = v + u_0}$; där v skall lösa

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x,0) = v(x,1) = 0 \\ v(0,y) = y - y^3 - u_0 = \frac{7}{6}(y - y^3) \\ v \text{ begr., då } x \to \infty \end{cases}$$

Variabelseparationen ger

$$\underline{v(x,y)} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n\pi x} + b_n e^{-n\pi x} \right) \sin(n\pi y)}$$

v begr. då $x \to \infty \Rightarrow \underline{a_n = 0}, \ \forall n \ (n \geq 1)$

$$\therefore \quad v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi x} \sin(n\pi y)$$

$$v(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi y) = \frac{7}{6}(y - y^3)$$

$$\therefore \quad \underline{b_n} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{7}{6}(y - y^3)\sin(n\pi y)\,dy = \frac{7}{12}\underbrace{\left[(y - y^3)\frac{-\cos(n\pi y)}{n\pi} \right]_0^1}_{=0} +$$

$$\frac{7}{12 n\pi}\int_0^1 (1 - 3y^2)\cos(n\pi y)\,dy$$

$$= \frac{7}{12 n\pi}\underbrace{\left[(1 - 3y^2)\frac{\sin(n\pi y)}{n\pi} \right]_0^1}_{=0} + \frac{7}{12(n\pi)^2}\int_0^1 6y \sin(n\pi y)\,dy$$

$$= \frac{7}{12(n\pi)^2}\left[6y \frac{\cos(n\pi y)}{-n\pi} \right]_0^1 + \frac{42}{12(n\pi)^3}\cancelto{0}{\int_0^1 \cos(n\pi y)\,dy}$$

$$= -\frac{42}{12(n\pi)^3}(-1)^n = \underline{\frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3}}$$

<u>Svar:</u> $\underline{\underline{u(x,y) = v(x,y) + u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3} e^{-n\pi x} \sin(n\pi y) + \frac{1}{6}(y^3 - y).}}$

3) $$f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$$, (se boken! / källa!)

Ansatt

$$y(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$ (p.g.a. att f är jämn)

$$\Rightarrow \quad y'' + 2y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2-n^2)\, a_n \cos(n\theta) = f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$$

Välj alltså:
$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2n-1)^2\left(2-(2n-1)^2\right)} \\ a_{2n} = 0 \end{cases}$$

Svar;
$$\underline{\underline{|\theta| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}}}, \qquad \underline{\underline{y(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2\left(2-(2n-1)^2\right)}}}$$

---

4) $$\hat{u}_k(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{-ix\xi}\, dx = c_k(f)$$

där $f(x) = e^{-ix\xi}$; $\quad x \in (-\pi, \pi)$

$$\therefore \quad \sum |\hat{u}_k(\xi)|^2 = \sum |c_k(f)|^2 = \{\text{Parsevals formel}\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 1$$

Svar; $$\underline{\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k(\xi)|^2 = 1}}.$$

5) $$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad 1<r<a \\ u(1,\theta) = u(a,\theta) = 0, & 0<\theta<\pi/2 \\ u(r,0) = 0, \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = C, & 1<r<a \end{cases}$$

Ansatz $\underline{u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \neq 0}$ och uppfyll de homogena ekv.

$$\frac{1}{r}(rR')'\Theta + \frac{1}{r^2}R\,\Theta'' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{r(rR')'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$(1)\begin{cases} -r(rR')' = \lambda R, & 1<r<a, \\ R(1) = 0, \quad R(a) = 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \Theta'' = \lambda\,\Theta, & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ \Theta(0) = 0 \end{cases}$$

(1) är ett Sturm-Liouville-problem med $w(r)=\frac{1}{r}$, $p(r)=r$, $q(r)=0$.

Egenvärdena är >0; skriv $\lambda=\beta^2$, $\beta>0$.

(1) $\Leftrightarrow$ $r^2R'' + rR' + \beta^2 R = 0$, som är av Euler typ och har lösningar av typ $\underline{R(r) = r^k}$.

Insättning i (1) ger

$$r^2 k(k-1) r^{k-2} + r k r^{k-1} + \beta^2 r^k = 0, \qquad k^2 - k + k + \beta^2 = 0$$

$k^2 = -\beta^2$; $k = \pm i\beta$. Allmän lösning:

$$\underline{R(r)} = C_1 r^{i\beta} + C_2 r^{-i\beta} = C_1 e^{i\beta \ln r} + C_2 e^{-i\beta \ln r}$$

$$= \underline{A\cos(\beta \ln r) + B\sin(\beta \ln r)}$$

$R(1) = A = 0$, $R(a) = B\sin(\beta \ln a) = 0$, $B \neq 0 \Rightarrow \sin(\beta \ln a) = 0$

$\beta \ln a = n\pi$, $n \geq 1$, $\beta = \underline{\beta_n = \frac{n\pi}{\ln a}}$, $\underline{\lambda_n = \beta_n^2}$

Egenfunktioner $\underline{R_n(r) = \sin(\beta_n \ln r)} = \underline{\sin\left(\frac{n\pi \ln r}{\ln a}\right)}$

(2) blir $\Theta_n'' = \beta_n^2\,\Theta$,

$$\Theta_n(\theta) = a_n \sinh(\beta_n\theta) + b_n\cosh(\beta_n\theta)$$

$$\Theta_n(0) = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

5) forts.

Ansätt totallösningen

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\,\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\beta_n \theta) \sin(\beta_n \ln r).$$

Återstår $u(r, \frac{\pi}{2}) = c$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \sinh\left(\beta_n \tfrac{\pi}{2}\right)}_{c_n} \sin(\beta_n \ln r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\beta_n \ln r) = c$$

$\{\sin(\beta_n \ln r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt OG-system på intervallet $(1, a)$ med viktfunktion $w(r) = \frac{1}{r}$, och c_n är Fourier-koeff till den konstanta funktionen c m.a.p. detta OG-system så att

$$c_n = \frac{1}{\rho_n} \int_1^a c \cdot \sin(\beta_n \ln r)\,\frac{1}{r}\,dr$$

$$\rho_n = \int_1^a \sin^2(\beta_n \ln r)\,\frac{1}{r}\,dr = \left[\ln r = x,\ \frac{1}{r}dr = dx\right]$$

$$= \int_0^{\ln a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right) dx = \frac{\ln a}{2},$$

$$c_n = \frac{2c}{\ln a} \int_0^{\ln a} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right) dx = \frac{2c}{\ln a}\left[-\frac{\ln a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ln a}\right)\right]_0^{\ln a}$$

$$= \frac{2c}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2c}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

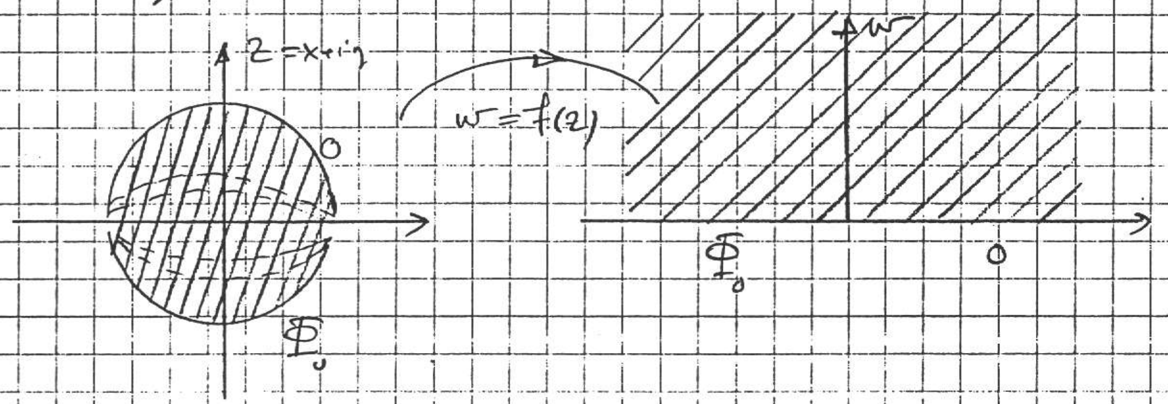
$$\Rightarrow \quad c_{2k} = 0, \qquad c_{2k-1} = \frac{4c}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k} = 0; \qquad a_{2k-1} = \frac{c_{2k-1}}{\sinh\left(\beta_{2k-1} \frac{\pi}{2}\right)}.$$

<u>Svar:</u>

$$u(r,\theta) = \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \frac{\sinh \frac{(2k-1)\pi\theta}{\ln a}}{\sinh \frac{(2k-1)\pi^2}{2\ln a}} \sin \frac{(2k-1)\pi \ln r}{\ln a}$$

6) Cylinderns tvärsnitt är enhetscirkeln (med lämplig längdenhet). Avbilda cirkeln på övre halvplanet så att halvcirkeln (där $\Phi = 0$) avbildas på positiva realaxeln och undre halvcirkeln (där $\Phi = \Phi_0$) på negativa realaxeln:



$w = j\,\frac{1-z}{1+z}$ (Möbiusavbildning)

Välj som Φ: $\Phi(\theta) = A\theta + B$ med $\begin{cases} \cot\theta = \frac{u}{v} \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow$

$\theta = \operatorname{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)$

$\Phi(\theta = 0) = 0 \Rightarrow A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0.$

$\Phi(\theta = \pi) = \Phi_0 \Rightarrow A \cdot \pi = \Phi_0 \Rightarrow A = \frac{\Phi_0}{\pi}$

$\therefore \quad \underline{\Phi(u,v) = \frac{\Phi_0}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{u}{v}\right)}$

$u + iv = j\,\frac{1-x-jy}{1+x+jy} = j\,\frac{(1-x-jy)(1+x-jy)}{(1+x)^2+y^2} = \frac{2y + j(1-x^2-y^2)}{(1+x)^2+y^2}$

Alltså är $\underline{\underline{\Phi(x,y) = \frac{\Phi_0}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{2y}{1-x^2-y^2}}}$.

Speciellt är $\Phi(x,0) = \frac{\Phi_0}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\Phi_0}{2}$; $-1 < x < 1$.

Ekvipotentialkurvor: $\frac{2y}{1-x^2-y^2} = c$ (Cirkelbågar genom $(\pm 1, 0)$)